

مباوى التحليل الرياضى

$$\square \cap \square \Leftrightarrow \square \cap \square$$



د. مصطفى أحمد الجندى

أستاذ الرياضيات

بكلية الهندسة جامعة الاسكندرية

مباوى التحليل الرياضى

$$\square \quad \Pi \quad \square \quad \Leftrightarrow \quad \square \quad \Pi$$

د. مصطفى احمد الجندى

أستاذ الرياضيات

بكلية الهندسة جامعة الاسكندرية



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

وَمَا أُوتِيتُمْ مِنَ الْعِلْمِ إِلَّا قَلِيلًا

صَلَّى اللَّهُ الْعَظِيمِ

مقدمة

يعزى كثير من التقدم المذهل فى العلوم والتكنولوجيا فى عصرنا الحديث لتطور
باضيات.

صمم هذا الكتاب كمرجع فى التحليل الرياضى بلغة الضاد بهدف تغطية بعض القصور
' يكتب بها من لغة علمية وإثراء مكتبتها فى مجال يقوم مقام العمود الفقري للعلوم التطبيقية.

عرضت أبواب الكتاب بصيغة وسط بين النظرية والتطبيق مع تركيز فى الأمثلة
ضخمة لمعالجة المشاكل التى يمكن أن تتناولها موضوعات الكتاب ويهدف إلماء المهارات
ندرات الرياضية لدى الطالب، زود الكتاب فى نهاية كل جزئية من جزئيات الكتاب بتمارين
سمة بهذه الجزئية - كما زود بتمارين عامة عقب كل باب.

وكما يشكر المؤلف د. لؤى L. O. U. لجهدها فى إخراج هذا الكتاب إلى النور
منى لها دوام التوفيق.

أمل أن يكون الكتاب مفيداً لقارئه

والله من وراء القصد

المؤلف

مصطفى أحمد الجندى

Contents الفهرس

| الموضوع | الصفحة |
|--|--------|
| الباب الأول: نظرية القيمة المتوسطة | ٧ |
| الباب الثاني: من طرق التكامل | ٢٦ |
| الباب الثالث: دوال بيتا وجاما | ٥٧ |
| الباب الرابع: تكاملات المتعددة | ٧٣ |
| الباب الخامس: التفاضل الجزئي | ١٥٩ |
| الباب السادس: المعادلات التفاضلية ذات المعاملات الثابتة | ٢٦٥ |
| الباب السابع: المعادلات التفاضلية ذات المعاملات المتغيرة | ٢٩٥ |
| الباب الثامن: نظم المعادلات الخطية | ٣٢١ |
| الباب التاسع: مسائل القيم الحدية | ٣٣٨ |

نظرية القيمة المتوسطة

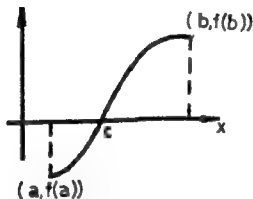
The mean value theorem

٢-١ نظرية القيمة المتوسطة (The mean value theorem)

نمهد أولاً لنظرية القيمة المتوسطة بالنتائج التالية عن الدوال

المتصلة

نظرية بولزانو - كوشي الأولى: إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة



في فترة ما $[a, b]$

ولها قيم مختلفة الأشارات

عند نهايتي الفترة فإنه

توجد نقطة c داخل

الفترة (a, b) بحيث

$$f(c) = 0$$

هذه الخاصية الهامة للدوال المتصلة تنص على أنه إذا تغيرت

أشارة دالة $f(x)$ بين نقطتين a, b فإنه يوجد بينهما جذر

$$. f(x) = 0$$

يمكن تعميم النظرية السابقة لنحصل على نظرية بولزانو - كوشي

الثانية.

نظرية: إذا كانت الدالة $f(x)$ متصلة في فترة اختيارية I

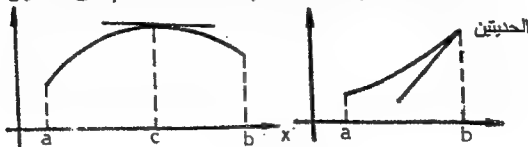
وكانت $f(a) = A$ بينما $f(b) = B$ حيث $a, b, \in I$ من ثم فإنه

لأي عدد $A < C < B$ توجد نقطة $x = c$ بين a, b بحيث $f(c) = C$.

أن معرفة مشتقة دالة قد يمكننا من معرفة سلوك الدالة. مثلاً، وجود مشتقة $f'(x)$ لدالة $f(x)$ في الفترة $a \leq x \leq b$ يعنى أن الدالة $f(x)$ متصلة عند كل نقطة من نقط الفترة (بينما إتصال دالة عند نقطة لا يعنى بالضرورة وجود مشتقة لها عند هذه النقطة). مع أن للمشتقة الأولى دافع ومحرك، هنسمى بشكل أساسى (إذ هى تحضى ميل المماس لمنحنى) إلا أن تعريفها لا يرتبط بأى تمثيل هندسى. النتائج التالية تحضى إرتباطاً بين سلوك دالة ومشتقتها الأولى.

نظرية تمهيدية: (Lemma) نفرض أن للدالة $f(x)$ مشتقة محدودة عند نقطة x_0 إذا كانت $f'(x_0) > 0$ $f'(x_0) < 0$ فإنه لقيم x القريبة بشكل كاف من x_0 من جهة اليمين تكون $f(x) > f(x_0)$ ولقيم x القريبة بشكل كاف من x_0 من جهة اليسار تكون $f(x) < f(x_0)$. هذه الأنظورة تنص على ترابيد [تتأقص] $f(x)$ فى جوار نقطة x_0 إذا كانت $f'(x_0) > 0$ $f'(x_0) < 0$

نظرية فرمّا (fermat's Theorem) نفرض أن دالة $f(x)$ معرفة على فترة I وأن لها قيمة عظمى (صغرى) عند نقطة داخلية $x=c$ فى هذه الفترة إذا كانت للدالة مشتقة $f'(c)$ من الجهتين منتهية عند النقطة c فإنه من الضرورى أن تتعدم هذه المشتقة. إثبات نظرية فرمات يتضح مباشرة من النظرية التمهيدية السابقة. يجب أن نلاحظ أن النظرية قد لا تتحقق إذا كانت للنقطة c إحدى النقطتين



النظرية التالية تمثل تطبيقاً ممتعاً لنظرية فرما.

نظرية داربوا (G. Darboux): إذا كان للدالة $f(x)$ مشتقة

منتبهة عند جميع نقاط الفترة $[a, b]$ فإن المشتقة $f'(x)$ تأخذ جميع القيم الواقعة بين $f'(a)$, $f'(b)$

في هذه النظرية $f'(a)$ تعني المشتقة من جهة اليمين بينما

$f'(b)$ تعني المشتقة من جهة اليسار. نظرية داربوا تتيج مسارا مشابها

لنظرية بولزانو - كوشي الثانية ولكنها ليست مستنتجة منها - حيث أن

مشتقة دالة متصلة ليست بالضرورة متصلة.

النظرية التالية مقدمة ضرورية لنظرية القيمة المتوسطة التي تلعب

دورا هاما في حساب التفاضل.

نظرية رول (M. Rolle): نفرض أن الدالة $f(x)$:

١ - متصلة في فترة مغلقة $[a, b]$.

٢ - لها مشتقة منتبهة $f'(x)$ في الفترة المفتوحة (a, b) على

الأقل.

٣ - لها قيم متطوية عند حدى الفترة

من ثم توجد نقطة واحدة على الأقل $c \in (a, b)$ بحيث $f'(c) = 0$

الإثبات: حيث أن $f(x)$ دالة متصلة في الفترة $[a, b]$ بالتالى

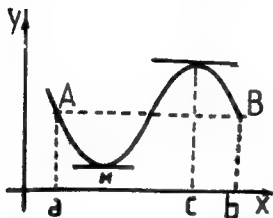
فهى تأخذ فى هذه الفترة حدها الأعلى M أو حدها الأصغر m (أو

كلاهما).

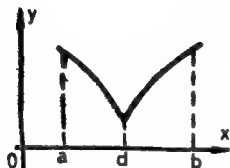
فى حالة $M = m$ نحصل على $f(x) = M = m$ وبالتالى

$f'(x) = 0$ لجميع قيم x .

في الحالة $M > m$ وحيث أن $f(a) = f(b)$ ، من الضروري أن تأخذ الدالة إحدى نهايتها في نقطة داخلية في الفترة $[a, b]$. بتطبيق نظرية فرما توجد نقطة c بحيث $f'(c) = 0$



نتص النظرية هندسيا على أنه إذا تساوت قيم دالة متصلة ومشتقاتها الأولى معرفة بين نقطتين فإنه توجد بينهما نقطة يكون المماس عندها موازيا لمحور x .



تنتهي صحة نظرية رول إذا إكتفينا بالشرطين الأول والثالث كما يوضح المثال بالشكل إذ يعرض دالة غير قابلة للإشتقاق عند نقطة d .

نأتي الآن لتعريف نظرية رول وهي النظرية الهامة والأساسية في حساب التفاضل. في هذه النظرية كما في نظرية رول نعرض شروطا لسنا يصعد إستقلاليتهما بقدر التركيز على عرضها.

نظرية (لاجرانج أو نظرية القيمة المتوسطة)

The Mean value theorem

نفرض أن الدالة $f(x)$:

١ - متصلة في الفترة $[a, b]$

٢ - لها مشتقة منتهية $f'(x)$ في الفترة (a, b) على الأقل من ثم

توجد نقطة c في الفترة (a, b) بحيث:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

الإثبات: للدالة المساعدة

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$$

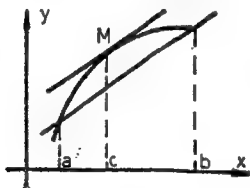
تحقق شروط نظرية رول في الفترة $[a, b]$ ، من ثم توجد نقطة c

في الفترة (a, b) بحيث $g'(c) = 0$

$$i.e., \quad 0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

بالتالي نتحقق النظرية.

هندسيا تنص نظرية لاجرانج على أنه توجد نقطة $M(c, f(c))$



على المنحنى $y = f(x)$

يكون المماس عندها موازيا

للوتر الواصل بين النقطتين

الحديتين .

يمكن كتابة نظرية القيمة المتوسطة كالآتي:

$$f(b) - f(a) = f'(c) (b - a)$$

من المناسب كذلك كتابتها أيضا كالآتي:

$$f(b) = f(a) + (b - a) f'(a + \theta (b - a))$$

حيث $0 < \theta < 1$, $c = a + \theta (b - a)$

يوضع $b = a + h$ تؤل الصيغة السابقة إلى

$$f(a + h) = f(a) + h f'(a + \theta h)$$

يوضع x بدلا من a ووضع Δx بدلا من h في الصيغة السابقة

نحصل على صيغة التغيرات المنتهية.

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta x f'(x + \theta \Delta x)$$

$$\text{or } \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta x f'(x + \theta \Delta x) .$$

أخيرا نأتى لصيغة كوشي وهي تعميم لنظرية القيمة المتوسطة.

نظرية: نفرض أن الدالتين $f(x)$, $g(x)$

١ - متصلتان في الفترة $[a, b]$ بحيث $g(b) \neq g(a)$

٢ - لهما مشتقتان محدودتان $f'(x)$, $g'(x)$ في الفترة (a, b) على الأقل.

٣ - لا تنعدم كل من $f'(x)$, $g'(x)$ عند نفس النقطة.

من ثم يوجد عدد c في الفترة (a, b) بحيث:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

الإثبات: الدالة المساعدة

$$h(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & 1 \\ f(a) & g(a) & 1 \\ f(b) & g(b) & 1 \end{vmatrix}$$

تحقق شروط نظرية رول، من ثم يوجد عدد $c \in (a, b)$ بحيث

$$h'(c) = 0 = \begin{vmatrix} f'(c) & g'(c) & 0 \\ f(a) & g(a) & 1 \\ f(b) & g(b) & 1 \end{vmatrix} = f'(c)(g(b) - g(a)) - g'(c)(f(b) - f(a))$$

$$\text{i.e.,} \quad \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

تتضح أهمية عدم إنعدام كل من f' , g' عند نفس النقطة من المثال
الآتى: نفرض

$$a = -1, b = 1, f = x^2, g = x^3$$

من ثم

$$f(b) - f(a) = 0, g(b) - g(a) = 2$$

ولا يمكن أن تتحقق النتيجة إلا إذا كان $f'(c) = 0$ أى عند
 $c = 0$ حيث عندها أيضا $g'(c) = 0$ وتصبح الصيغة بلا معنى.

مثال (١): أوجد قيمة c فى نظرية القيمة المتوسطة حيث

$$f(x) = x(x-1)(x-2) \quad a = 0, \quad b = \frac{1}{2}$$

الحل: نوجد أولا

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{3/8}{1/2} = \frac{3}{4}$$

نوجد $f'(x)$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$$

لإيجاد النقط x حيث $f'(x) = \frac{3}{4}$ نحل المعادلة

$$3x^2 - 6x + 2 = 3/4 \Rightarrow x = (6 \pm \sqrt{21})/6$$

من ثم فإن $c \pm (6 - \sqrt{21})/6$

$$\text{i.e., } f(a) = f(b)$$

١-٢ تطبيقات نظرية القيمة المتوسطة للتفاضل

لنظرية القيمة المتوسطة تطبيقات عدة سوف نتضح أهميتها

خلال دراستنا وسنعرض الآن لواحد من هذه التطبيقات.

الصيغ غير المحددة (Indeterminate forms)

عد دراسة نهايات بعض الدوال على الهيئة $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ قد

يؤول كل من البسط والمقام إلى الصفر أو مالا نهاية وبذا نحصل على

الصور $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$ والمسماه كميات غير معينة.

نظرية: نفرض أن $f(a) = g(a) = 0$ بينما $f'(a), g'(a)$ لهما

وجود والنسبة بينهما منتهية من ثم

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

الإثبات: يتحقق الإثبات مباشرة من تعريف المشتقة

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f(x) - f(a)) / (x - a)}{(g(x) - g(a)) / (x - a)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{f'(a + \theta(x - a))}{g'(a + \theta(x - a))} = \frac{f'(a)}{g'(a)} \end{aligned}$$

تسمى النظرية السابقة قاعدة لوبيتال Γ Hospital's rule

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{\ln(1+x)} \quad \text{مثال (٢):}$$

الحل: التعويض المباشر يؤدي إلى الصيغة $\frac{0}{0}$ ، من ثم

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{\ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ae^{ax} + ae^{-ax}}{1/(1+x)} = 2a$$

للصورة الغير معينة $\frac{\infty}{\infty}$:

نظرية: نفرض أن الدالتين $f(x)$, $g(x)$:

١ - معرفتان في الفترة $[a, b]$

٢ - تؤولان إلى مالانهاية عندما تؤول x إلى a

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \quad , \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$$

٣ - لهما مشتقتان $f'(x)$, $g'(x)$ منتهيتان في الفترة

$[a, b]$ بالإضافة أن $g'(x) \neq 0$

$$\text{٤ - النهاية } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ معرفة وتساوي } K$$

من ثم

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = K = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

الإثبات: سندرس فقط الحالة التي فيها K كمية منتهية. الحالة التي

فيها K غير منتهية تعالج بصورة مطابقة.

لكل عدد إختياري $\varepsilon > 0$ يوجد عدد $\delta > 0$ بحيث لكل

$$a < x < a + \delta = x_0$$

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - K \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

باستخدام نظرية كوشي على الفترة $[x, x_0]$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad x < c < x_0$$

بالتالى

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - K \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

من المنطقة

$$\frac{f(x)}{g(x)} - K = \frac{f(x_0) - Kg(x_0)}{g(x_0)} + \left[1 - \frac{g(x_0)}{g(x)} \right] \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - K \right]$$

نحصل على

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - K \right| \leq \left| \frac{f(x_0) - Kg(x_0)}{g(x_0)} \right| + \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - K \right|$$

حيث أن

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x_0) - Kg(x_0)}{g(x_0)} = 0 \quad (\text{because } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty)$$

من ثم يمكن إيجاد $\eta > 0$ (يمكن اختيار $\eta < \delta$) بحيث

$$\left| \frac{f(x_0) - Kg(x_0)}{g(x_0)} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

لقيم $a < x < a + \eta$. بهذا لقيم x هذه يصبح

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - K \right| < \varepsilon$$

ويكتمل الإثبات

إثبات آخر: نختار قيمتين x, x_0 بحيث $a < x < x_0$. من صيغة

كوشي يوجد ξ بين x, x_0 بحيث

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

ولكن

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}}{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} .$$

أى أن

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \cdot \frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}}$$

حيث أن المقدار

$$\frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}}$$

يقترّب من الوحدة بإقتراب x من a

من ثم

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

مثال (٣) : التعويض المباشر عند إيجاد $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \ln x}{x \ln x}$ يعطى

الصورة $\frac{\infty}{\infty}$ من ثم

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \ln x}{x \ln x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 1/x}{1 + \ln x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

صور أخرى من المقادير غير المعينة

الصور غير المعينة $0^0, \infty, -\infty, 1^\infty, \infty, 0^\infty$ يمكن أن تطبق

عليها قاعدة لوبيتال بشرط كتابتها على إحدى صورتين $\frac{0}{0}$ or $\frac{\infty}{\infty}$

مثال (٤) التعويض المباشر فى النهاية $\lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{1/x} - 1)$ يعطى

الصورة غير المعينة $\infty \cdot 0$ والتي يمكن تحويلها إلى الصورة $\frac{0}{0}$ كالآتى:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{1/x} - 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{1/x} - 1}{1/x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1/x^2 e^{1/x}}{-1/x^2} = 1$$

الصور غير معينة $0^0, \infty, 1^\infty$ تعالج كالآتى:

نعلم أن $b^{\log_b x} = x$ من ثم

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln f(x) g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)}$$

$$e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)}$$

أى أنه لإيجاد $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)}$ نوجد أولاً $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)$

وإذا كان c وعليه تكون النهاية المطلوبة مساوية e^c

مثال (٥) لإيجاد $\lim_{x \rightarrow 1} x^{1/(1-x)}$ نوجد أولاً

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x} \ln x = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/x}{-1} = -1$$

وتكون النهاية المطلوب

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{1/(1-x)} = e^{-1}$$

٢-٢ نظرية القيمة المتوسطة للتكامل

لنظرية القيمة المتوسطة للتفاضل نظير في التكامل نعهد لها

بالخواص التالية لدالة $f(x)$ متصلة في فترة $[a, b]$.

خاصية ١: إذا كانت $f(x) \geq 0$ لقيم $a \leq x \leq b$ فإن $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

نحتاج للتحقق من هذه الخاصية أن نلاحظ المجموع الأصغر s

(النساج من تعريف التكامل) $s = \sum m_i \Delta x_i$ حيث m_i الحد الأصغر

للدالة $f(x)$ في فترة التقسيم Δx_i ، لا يمكن أن يساوى للصفر مالم يكن

قياس الدالة $f(x)$ مساويا للصفر .

خاصية ٢: إذا كانت $k \leq f(x) \leq K$ فإن

$$k(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq K(b-a)$$

تتحقق هذه الخاصية مباشرة بتطبيق الخاصية السابقة على الدوال

$$f(x) - k, \quad K - f(x)$$

١-٣ نظرية (القيمة المتوسطة للتكامل):

لأي دالة متصلة $f(x)$ في فترة $[a, b]$ يوجد عدد

$\xi \in (a, b)$ بحيث

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f(\xi)$$

الإثبات: اعتمادا على الخاصية ٢ وإختيار k مساويا لأصغر قيمة

للدالة $f(x)$ وإختيار K أكبر قيمة للدالة في الفترة $[a, b]$ يصبح التكامل

مساويا $(b-a)$ حيث تقع η بين العددين k, K . حيث أن $f(x)$ دالة

متصلة وجب وجود عدد ξ بحيث $f(\xi) = \eta$. بفرض ان $F(x)$ هي ناتج تكامل $f(x)$ ، أمكن أن نكتب

$$F(b) - F(a) = (b-a) F'(\xi)$$

أى أن

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f(\xi).$$

١-٢ نظرية (القيمة المتوسطة العامة للتكامل):

إذا كانت $\phi(x)$ غير سالبة وكانت k أصغر قيمة لدالة $f(x)$ بينما K أكبر قيمة لها فى الفترة $[a, b]$ فإن

$$k \int_a^b \phi(x) dx \leq \int_a^b f(x) \phi(x) dx \leq K \int_a^b \phi(x) dx,$$

أيضا

$$\int_a^b f(x) \phi(x) dx = f(\xi) \int_a^b \phi(x) dx$$

حيث تقع ξ بين a, b

يرتكز إثبات هذه النظرية على تطبيق الخاصية ١ على التكاملين

$$\int_a^b \{f(x) - k\} \phi(x) dx \quad , \quad \int_a^b \{K - f(x)\} \phi(x) dx$$

تمارين

١ - أوجد قيم النهايات الآتية:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\ln(x+1)}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \cos x - e^x}{\ln(1+x^2)}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^3 \sin x}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \tan x}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - 3x - e^{-x}}{x^2}$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 3^x}{5 - 5^x}$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - e^x - e^{-x}}{\sin^2 x}$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^{nx} - x}{1 - \cos nx}$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\ln \sin x}{(\pi - 2x)^2}$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi/2 - \tan^{-1} x}{\frac{1}{2} \ln(x-1)/(x+1)}$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$$

$$(13) \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \left(\frac{\pi}{2} \right) x$$

$$(14) \lim_{x \rightarrow 1} x^{1/1-x}$$

$$(15) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x \tan x} \right)$$

$$(16) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$$

$$(17) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^{2x} + x e^x - 2 e^{2x} + 2 e^x}{(e^x - 1)^3}$$

$$(18) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{e^{\sin x} - e^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x [\ln(x+1) - \ln(x-1)]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2 - \sin^2 x}{x^4}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x} \ln x$$

$$(19) \lim_{x \rightarrow 0} (\cot^2 x - 1/x^2) \quad (20) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x - \sin x - x^2}{(2 + 2x + x^2) e^{-x} - 2}$$

$$(21) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{1/x^2}$$

$$(22) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{x^3}$$

$$(23) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x e^{t^2} dt}{x}$$

$$(24) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2 \sin x}{x \sin x}$$

٢٥ - إذا كان $\frac{a_0}{n+1} + \frac{a_1}{n} + \dots + \frac{a_{n-1}}{2} + a_n = 0$ أثبت أن

المعادلة $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$ جنر

واحد على الأقل في الفترة $[0, 1]$

(اعتبر الدالة $f(x) = \int_0^x (a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n) dt$)

٢٦ - إذا حققت الدوال $\phi(x)$ و $\psi(x)$ و $f(x)$ شروط نظرية القيمة

المتوسطة من اتصال وتفاضلية تفاضل. أثبت أنه توجد

قيمة ξ بين a, b بحيث

$$\begin{vmatrix} f(a) & \phi(a) & \psi(a) \\ f(b) & \phi(b) & \psi(b) \\ f'(\xi) & \phi'(\xi) & \psi'(\xi) \end{vmatrix} = 0$$

[إرشاد: اعتبر الدالة الناتجة من إستبدال الصف الأخير

بالدوال $f(x), \phi(x), \psi(x)$

٢٧ - إذا حققت الدوال $\phi(x)$, $\psi(x)$ شروط نظرية كوشي للقيمة المتوسطة وكانت $\phi'(x) \neq 0$ إثبت أنه توجد نقطة $\xi \in (a, b)$ بحيث

$$\frac{\phi(\xi) - \phi(a)}{\psi(b) - \psi(\xi)} = \frac{\phi'(\xi)}{\psi'(\xi)}$$

[طبق نظرية رول على الدالة $\{\phi(x) - \phi(a)\} \{\psi(b) - \psi(x)\}$]

من طرق التكامل

Methods of integration

مثال ١: إيجاد

$$J = \int \frac{x dx}{\sqrt{x+1} (\sqrt[3]{x+1} - 1)}$$

نضع $x+1 = t^6$

$$J = \int 6 \frac{(t^6-1) t^5 dt}{t^3 (t^2-1)} = 6 \int t^2 (t^4 + t^2 + 1) dt$$

قيمة مطلوبة

$$= 6 \left[\frac{1}{7} t^7 + \frac{1}{5} t^5 + \frac{1}{3} t^3 \right] + C$$

$$= 6 \left[\frac{1}{7} (x+1)^{7/6} + \frac{1}{5} (x+1)^{5/6} + \frac{1}{3} (x+1)^{1/2} \right] + C$$

تكاملات ذات الحدين ٢-١-٢

هي تكاملات يكون موضوعها تعبيراً من $x^n (a + bx^n)^p$ حيث m, n, p أعداد نسبية بينما a, b أي ثوابت.

يمكن إجراء هذه التكاملات في الحالات الآتية:

١- إذا كان p عدداً صحيحاً وكان q هو المضاعف المشترك

الأصغر لعوامل مقامات m, n يمكن أن نفرص: $x = t^q$

مثال ٢: في التكمّل

$$J = \int \frac{dx}{\sqrt{x} (1 + \sqrt[3]{x})^2}$$

$$p = -2, m = -\frac{1}{2}, n = \frac{1}{3}$$

بوضع $x = t^6$ نحصل على

$$J = \int \frac{6 t^5 dt}{t^3 (1 + t^2)^2} = 6 \int \left[\frac{1}{t^2 + 1} - \frac{1}{(t^2 + 1)^2} \right] dt$$

$$= 6 \left[\frac{1}{2} \tan^{-1} t - \frac{1}{2} \frac{t}{1 + t^2} \right] + C = 3 \left[\tan^{-1} t - \frac{t}{1 + t^2} \right] + C$$

ويوضع \sqrt{x} بدلا من t نحصل على التكامل بدلالة x

2- إذا كان p كسرا وكان $\frac{m+1}{n}$ عددا صحيحا يمكن أن

نضع $t^a = (a+bx^n)$ حيث q هو مقام p .

مثال 3: في التكامل

$$J = \int \frac{x dx}{\sqrt{1+\sqrt{x^2}}}$$

$$p = -1/2, m = 1, n = 2/3, (m+1)/n = 3$$

يمكن أن نضع $1+x^{2/3} = t^2$ لنحصل على

$$\begin{aligned} J &= \int x^{4/3} (1+x^{2/3})^{-1/2} x^{-1/3} dx \\ &= \int (t^2-1)^2 (t^{-1})^3 t dt = 3 \int (t^4-2t^2+1) dt \\ &= 3 \left(\frac{1}{5} t^5 - \frac{2}{3} t^3 + t \right) + C \end{aligned}$$

ويوضع $\sqrt{1+x^{2/3}}$ بدلا من t نحصل على التكامل المطلوب

3- إذا لم يكن أي من p أو $\frac{m+1}{n}$ عددا صحيحا وكان $p + \frac{m+1}{n}$ عددا صحيحا يمكن أن نفرض

$$\frac{a+bx^n}{x^n} = ax^{-n} + b = t^q$$

حيث q هو مقام p

مثال 4: في التكامل

$$J = \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1+x^2}} = \int x^{-4} (1+x^2)^{-1/2} dx$$

$$m = -4, n = 2, p = -\frac{1}{2}, \frac{m+1}{n} + p = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = -2$$

وعليه يمكن أن نضع $t^2 = \frac{1}{x^2} + 1$

$$J = \int x^{-5} \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right)^{-1/2} dx = \int x^{-6} \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right)^{-1/2} x dx$$

$$= -\int (t^2-1)^3 t^{-1} \frac{t}{(t^2-1)^2} dt = -\int (t^2-1) dt$$

$$= -\frac{t^3}{3} + t = \frac{t}{3} (3-t^2) + C$$

$$= \frac{1}{3} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} (3 - \frac{x^2+1}{x^2}) + C$$

$$= \frac{1}{3} x^{-3} \sqrt{x^2+1} (2x^2-1) + C$$

٢-١-٣ تكاملات من صيغ من الدرجة الثانية

نعرض لتكاملات بالهيئة $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$ حيث R

دالة نسبية.

يمكن تطبيق تعويضات أويلر الآتية في هذه التكاملات:

$$1 - \text{إذا كان } a > 0 \text{ نضع } \sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm \sqrt{ax^2}$$

لنحصل على

$$x = \frac{t^2 - c}{b \pm 2\sqrt{a}t}$$

مثال ٥: لإيجاد

$$J = \int \frac{dx}{(x+2)^3 \sqrt{x^2+2x}}$$

نضع

$$x^2+2x = (t-x)^2 \Rightarrow x = \frac{t^2}{2(1+t)}$$

من ثم

$$J = \int \frac{8(1+t)^3}{(t+2)^6} \cdot \frac{2(1+t)}{t(t+2)} \cdot \frac{t(t+2)}{2(1+t)^2} dt$$

$$= \int \frac{8(1+t)^2}{(t+2)^6} dt = 8 \int \left[\frac{1}{(t+2)^4} - \frac{2}{(t+2)^5} + \frac{1}{(t+2)^6} \right] dt$$

$$= 8 \left[-\frac{1}{3} \frac{1}{(t+2)^3} + \frac{2}{4(t+2)^4} - \frac{1}{5(t+2)^5} \right] + C$$

من ثم يمكن التعبير عن التكامل بدلالة x

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c} \quad \text{نضع } c > 0 \text{ يمكن أن نضع}$$

مثال ٦: لإيجاد

$$J = \int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+2x+4}}$$

نضع $(x^2+2x+4) = (xt+2)^2$ وبالتالي نحصل على

$$x^2+2x = x^2t^2+4xt \Rightarrow x = 2 \frac{2t-1}{1-t^2}$$

من ثم

$$= \int \frac{1-t^2}{2(t^2-t+1)} \cdot \frac{1-t^2}{2t(2-t)} \cdot \frac{4(t^2-t+1)dt}{(1-t^2)^2}$$

$$= \int \frac{dt}{t(2-t)} = \int \left(\frac{1/2}{t} + \frac{1/2}{2-t} \right) dt$$

$$= \frac{1}{2} \left[\ln\left(\frac{t}{2-t}\right) \right] + C$$

٣ - إذا أمكن تحليل ax^2+bx+c إلى الصورة $a(x-x_1)(x-x_2)$

نضع $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_1)$ أي أن

$$t^2 = \frac{a(x-x_2)}{x-x_1}$$

مثال ٧: لإيجاد

$$J = \int \frac{dx}{(x-p)\sqrt{(x-p)(x-q)}}$$

$$x = \frac{q-pt^2}{1-t^2} \quad \text{من ثم} \quad \frac{x-q}{x-p} = t^2 \quad \text{نضع}$$

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{dx}{(x-p)^2 t} = \int \frac{(1-t^2)^2}{t (q-p)^2} \cdot \frac{2t(q-p)}{(1-t^2)^2} dt \\ &= \frac{2}{q-p} \int dt = \frac{2}{q-p} t + C = \frac{2}{q-p} \sqrt{\frac{x-q}{x-p}} + C \end{aligned}$$

٤-١-٢ تكاملات لصيغ من الدرجة الثانية بالهيئة

$$(A) \quad \int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$$

حيث $P(x)$ كثيرة حدود.

يمكن إيجاد هذا التكامل بالصورة

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = Q(x) \sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

حيث $Q(x)$ كثيرة حدود ذات معاملات غير مغيبة من درجة أقل

من

درجة $P(x)$ بينما λ ثابت مجهول.

بتفاضل طرفي التكامل السابق نحصل على

$$P(x) = Q'(x) (ax^2+bx+c) + Q(x) (ax + \frac{b}{2}) + \lambda$$

بمساواة المعاملات المتناظرة نحصل على معاملات Q وكذلك λ

مثال ٨: التكامل

$$J = \int \frac{4x^2+17x+14}{\sqrt{x^2+3x+2}} dx$$

يمكن كتابته بالهيئة

$$J = (Ax+B) \sqrt{x^2+3x+2} + C \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+2}}$$

بالتفاضل بالنسبة إلى x ثم الضرب في

على

$$4x^2+17x+14 = A(x^2+3x+2) + (Ax+B)(x+\frac{3}{2}) + C$$

بمساواة المعاملات المتناظرة نحصل على

$$2A = 4, 3A + \frac{3A}{2} + B = 17, 2A + \frac{3}{2}B + C = 14$$

$$i.e., A=2, B=8, C=-2$$

$$\rightarrow J = (2x+8) \sqrt{x^2+3x+2} - 2 \int \frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4}}}$$

$$= (2x+8) \sqrt{x^2+3x+2} - 2 \ln [(x+\frac{3}{2}) + \sqrt{x^2+3x+2}] + C$$

يمكن أيضا معالجة تكامل موضوعه $P(x)/Q(x)$ حيث كل من

$Q(x)$, $P(x)$ كثيرتي حدود وحيث تطوى $Q(x)$ على أصفار (أو)

عوامل) مكررة، بطريقة مشابهة للمنهاج السابق ذكره.

لإيجاد التكامل المشار إليه (يفرض أن الكسر F/Q صحيح)

نكتب $Q = Q_1 Q_2$ حيث تتكون Q_2 من كل عامل من عوامل Q مأخوذاً

بالدرجة الأولى بينما $Q_1 = Q/Q_2$ من ثم فإن

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx$$

حيث $P_2(x)$ كثيرة حدود ذات معاملات غير معينة ومن درجة

أقل به واحد عن درجة $Q_2(x)$ بينما $P_1(x)$ هي أيضا كثيرة حدود ذات

معاملات غير معينة تقل درجتها أيضا لدرجة واحدة عن درجة $Q_1(x)$

بتفاضل • والضرب $Q(x)$ نحصل على متطابقة يمكن منها حساب

الثوابت المجهولة في $P_1(x), P_2(x)$

ملحوظة ١: حيث أن حساب التكامل في الطرف الأيمن من •

يتطلب كتابة موضوع التكامل بهيئة كسور جزئية،

لذا يمكن بدءاً من بدء كتابة $P_2(x) / Q_2(x)$ بالهيئة

$$\frac{P_2(x)}{Q_2(x)} = \frac{A_2}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \dots + \frac{B_1x+C_1}{x^2+bx+c} + \dots$$

• أى بهيئة كسور جزئية قبل اشتقاق •

ملحوظة ٢: يمكن أن نلاحظ أن $Q_1(x)$ تمثل القاسم المشترك

الأعلى بين كثيرتي الحدود $Q(x), Q'(x)$ وبالتالي

يمكن إيجاد $Q_1(x)$ بدون إيجاد جذور $Q(x)$

ومن ثم $Q_2 = Q/Q_1$ والتي يتوجب أن تكون

أصغرهما بسيطة.

ملحوظة ٣: الطريقة السابقة (والمسماه طريقة أومستروجرامسكي)

توفر كثيراً من العمليات الحسابية عند احتواء $Q(x)$

على عوامل ذات تكرار عال وخاصة إذا كانت هذه

العوامل بالهيئة x^2+ax+b

مثال ٩: التكامل

$$J = \int \frac{12x}{(x-1)^2(x^2+1)^2} dx$$

يمكن كتابته بالهيئة

$$J = \int \frac{12x}{(x-1)^2(x^2+1)^2} dx = \frac{Ax^2+Bx+C}{(x-1)(x^2+1)} + \int \left[\frac{L}{x-1} + \left(\frac{Mx+N}{x^2+1} \right) \right] dx$$

من تفاضل العلاقة ، والضرب في C نحصل على

$$12x = (2Ax+B)(x-1)(x^2+1) - (Ax^2+Bx+C) [(x^2+1) + 2x(x-1)]$$

$$+ [L(x^2+1) + (Mx+N)(x-1)](x-1)(x^2+1)$$

بوضع $x=1$

$$-2(A+B+C) = 12' \dots (1)$$

بوضع $x=1=\sqrt{-1}$

$$-A-B+C + i(-A+B+C) = 6i$$

$$-A-B+C=0 \quad (2)$$

$$-A+B+C=6$$

بحل المعادلات (1), (2), (3) نحصل على

$$A=-6, B=3, C=-3$$

معامل x^5

$$L+M=0 \quad (4)$$

معامل x^4

$$2A-A-2A-L-2M+N=0$$

$$\Rightarrow -L-2M+N=-6 \quad (5)$$

بوضع $x=0$

$$-L+N=B+C=0$$

بحل المعادلات (4), (5), (6) نحصل على

$$L=-M=N=-3$$

من ثم

$$J = \frac{-6x^2+3x-3}{(x-1)(x^2+1)} + \int \left[\frac{-3}{x-1} + \frac{3x-3}{x^2+1} \right] dx$$

$$= \frac{-6x^2+3x-3}{(x-1)(x^2+1)} - 3 \left[\ln(x-1) - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \tan^{-1}x + C \right]$$

٧-١-٥ تكاملات بالهينة

$$\int \frac{A dx}{(x-d)^k \sqrt{ax^2+bx+c}}$$

حيث $k = 1, 2, \dots$

يمكن تحويل هذا التكامل إلى صيغة مثالي ٨ وذلك بوضع $x-d=1/z$
مثالي ١٠: لإيجاد

$$J = \int \frac{dx}{(x+2)^3 \sqrt{x^2+2x}}$$

نضع $x+2 = \frac{1}{z}$ من ثم

$$\ln(x+2) = -\ln z = -\frac{dx}{x+2} = -\frac{dz}{z}$$

$$\therefore J = -\int \frac{z^2}{\sqrt{\frac{1}{z^2} - \frac{2}{z}}} \frac{dz}{z} = -\int \frac{z^2 dz}{\sqrt{1-2z}}$$

بوضع $1-2z = t^2$ نحصل على

$$J = -\int \frac{[1(1-t^2)]^2}{t} (-t dt) = \frac{1}{4} \int (t^4 - 2t^2 + 1) dt$$

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} + t \right] + C = \frac{t}{4} \left[\frac{t^4}{5} - \frac{2t^2}{3} + 1 \right] + C$$

من التعويضات السابقة نحصل على $t^2 = \frac{x}{x+1}$ وبالتالي

$$J = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{x}{x+1}} \left[\frac{1}{5} \left(\frac{x}{x+1} \right)^2 - \frac{2}{3} \frac{x}{x+1} + 1 \right] + C$$

$$= \frac{1}{60} \sqrt{x} (x+1)^{-5/2} (8x^2 + 20x + 15) + C$$

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+q)^m \sqrt{ax^2+c}} dx$$

حيث $m=1,2,\dots$

لمعالجة هذه الحالة نعتبر

$$\int \frac{(Mx+N) dx}{(x^2+q)^m \sqrt{ax^2+c}} = \int \frac{Mx dx}{(x^2+q)^m \sqrt{ax^2+c}} + \int \frac{N dx}{(x^2+q)^m \sqrt{ax^2+c}}$$

حيث يمكن وضع $ax^2+c=u^2$ في التكامل

$$\int \frac{Mx dx}{(x^2+q)^m \sqrt{ax^2+c}}$$

بينما يمكن وضع

$$z = (\sqrt{ax^2+c})' = \frac{ax}{\sqrt{ax^2+c}}$$

في التكامل الثاني ومنه نحصل على

$$\frac{dx}{\sqrt{ax^2+c}} = \frac{dz}{a-z^2}, \quad x^2 = \frac{c^2}{a(a-z^2)}$$

وبالتالي يتحول التكامل إلى تكامل دوال نسبية

مثال ١١: إيجاد

$$J = \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^2+a^2}}$$

نضع $z = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$ ومن ثم

$$z \sqrt{x^2+a^2} = x \Rightarrow \sqrt{x^2+a^2} dz + z (\sqrt{x^2+a^2})' dx = dx$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+a^2} dz + z^2 dx = dx$$

$$\rightarrow \frac{dz}{1-z^2} = \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} \cdot x^2 = \frac{a^2 z^2}{1-z^2}$$

$$J = \int \frac{(1-z^2)^2}{a^4 z^4} \frac{dz}{1-z^2} = \frac{1}{a^4} \int \left(\frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^2} \right) dz$$

$$= \frac{1}{a^4} \left[\frac{1}{z} - \frac{1}{3z^3} \right] + C = \frac{1}{a^4} \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x} \left[1 - \frac{1}{3} \frac{x^2+a}{x^2} \right] + C$$

٧-٢ تكاملات بالهينة

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}}$$

لأي عدد n .

يمكن إيجاد مثل هذه التكاملات (تكاملات الحثين) بوضع

$$x^n = \frac{1}{z^2} \Rightarrow n \ln x = -2 \ln z \Rightarrow \frac{ndx}{x} = -\frac{2dz}{z}$$

مثل ١٢: لإيجاد

$$J = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^{-1/2}+a^2}}$$

نضع

$$x^{5/2} = \frac{1}{z^2} \Rightarrow \frac{5}{2} \ln x = -2 \ln z \Rightarrow \frac{5}{2} \frac{dx}{x} = -\frac{2dz}{z}$$

$$\rightarrow J = \int \frac{-4/5 dz}{z\sqrt{1/z^2+a^2}} = -\frac{4}{5} \int \frac{dz}{\sqrt{1+a^2 z^2}}$$

$$= -\frac{4}{5} \frac{1}{a} \sinh^{-1} az + C = -\frac{4}{5a} \sinh^{-1}(ax^{-2/5}) + C$$

$$J = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x^2}}$$

مثال ١٣: أوجد

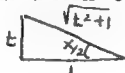
نضع $x^{n-2} = \frac{1}{t^2}$ من ثم

$$J = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^{n-2}-1}} = -\frac{2}{n-2} \int \frac{dt}{t\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}}$$

$$= \frac{-2}{n-2} \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{2}{n-2} \cos^{-1} t$$

$$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c}$$

٨-١-٢ تكاملات بالهينة



نستخدم التعويض $\tan \frac{x}{2} = t$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \text{ and } dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

لتحويل التكامل الى تكامل دالة نسبية

$$I = \int \frac{1}{\sin x - 7 \cos x - 5} dx$$

مثال ١٤: لإيجاد

نضع $\tan \frac{x}{2} = t$ ، من ثم

$$I = \int \frac{(1+t^2)}{2t-7(1-t^2)-5(1+t^2)} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$= \int \frac{dt}{t^2+t-6} = \frac{1}{5} \int \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+3} \right) dt$$

$$= \frac{1}{5} [\ln \frac{t-2}{t+3}] + A$$

مثال ١٥: لإيجاد $I = \int \frac{dx}{5+4\cos^2 x}$

$$I = \int \frac{dx}{5(\cos^2 x + \sin^2 x) + 4\cos^2 x} = \int \frac{dx}{9\cos^2 x + 5\sin^2 x}$$

بقسمة البسط والمقام على $\cos^2 x$ نحصل على

$$I = \int \frac{\sec^2 x dx}{9 + 5 \tan^2 x} = \int \frac{d \tan x}{9 + 5 \tan^2 x} = \frac{1}{3\sqrt{5}} \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{5}}{3} \tan x \right) + A$$

? ↓

$$\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx \quad \text{تكاملات تعتمد على الصيغة:}$$

مثال لإيجاد $I = \int_0^\pi x \sin^6 x dx$ نعتبر

$$I = \int_0^\pi x \sin^6 x dx = \int_0^\pi (\pi - x) \sin^6 (\pi - x) dx$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^\pi (\pi - x) \sin^6 x dx \Rightarrow 2I = \int_0^\pi \pi \sin^6 x dx \\ &= \pi \frac{5}{6} \frac{3}{4} \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

مثال: لإيجاد $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$ نعتبر

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} dx$$

$$\Rightarrow 2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$$

٩-٢ تكاملات بالاختزال المتتالي

تتميز هذه الطريقة بفاعليتها عند إيجاد تكاملات تحمل أدلة أو

أسس حيث يبقى منهج التكامل ثابتاً عند أدلة أو أسس أصغر وحيث نقودنا الصيغة الاختزالية إلى تكامل يسهل حسابه.

مثال ١٦: لإيجاد صيغة اختزالية للتكامل $\int \tan^n x dx$ نعتبر

$$u_n = \int \tan^n x dx = \int \tan^{n-2} x \tan^2 x dx$$

$$= \int \tan^{n-2} x (\sec^2 x - 1) dx$$

$$= \int \tan^{n-2} x \sec^2 x dx - \int \tan^{n-2} x dx$$

$$= \int \tan^{n-2} x d \tan x - u_{n-2}$$

$$u_n = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - u_{n-2}$$

مثال ١٧: لإيجاد صيغة اختزالية للتكامل $I_n = \int x^n e^x dx$ نعتبر

$$I_n = \int x^n e^x dx = \int x^n de^x = x^n e^x - \int e^x dx^n = x^n e^x - n I_{n-1}$$

مثال ١٨: إثبات أن

$$u_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{1}{(2n-2)} \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} u_{n-1}$$

حقيقة:

$$u_n = \int (x^2+1)^{-n} dx = x(x^2+1)^{-n} + 2n \int x^2 (x^2+1)^{-n-1} dx$$

$$= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n \int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^{n+1}} dx$$

$$= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n [u_n - u_{n+1}]$$

$$2n u_{n+1} = \frac{x}{(x^2+1)^n} + (2n-1) u_n$$

بوضع $n-1$ بدلا من n

$$2(n-1) u_n = \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + (2n-3) u_{n-1}$$

مثال ١٩: إذا كان

$$I_{n,n} = \int \frac{x^n dx}{(x^2+1)^n}$$

أثبت أن

$$2(n-1) I_{n,n} = x^{n-1} (x^2+1)^{-(n-1)} + (n-1) I_{n-2,n-1}$$

حقيقية

$$I_{n,n} = \int \frac{x^n dx}{(x^2+1)^n} = \frac{1}{2} \int \frac{x^{n-1} dx^2}{(x^2+1)^n}$$

$$= \frac{1}{2(1-n)} \int x^{n-1} d(x^2+1)^{-n+1}$$

$$= \frac{1}{2(1-n)} x^{n-1} (x^2+1)^{-n+1} - \frac{n-1}{2(1-n)} \int \frac{x^{n-2}}{(x^2+1)^{n-1}} dx$$

$$i.e., 2(n-1) I_{n,n} = x^{n-1} (x^2+1)^{-n+1} + (n-1) I_{n-2,n-1}$$

مثال ٢٠: لإيجاد صيغة (خترالية) للتكامل

$$I_{p,q} = \int x^p (1+x)^q dx$$

نلاحظ أن التكامل بالتجزئ

$$I_{p,q} = \int \frac{1}{p+1} (1+x)^q dx^{p+1}$$

$$\rightarrow (p+1) I_{p,q} = x^{p+1} (1+x)^q - \int x^{p+1} q (1+x)^{q-1} dx$$

$$= x^{p+1} (1+x)^q - q I_{p+1,q-1}$$

$$I_{m,n} = \int \frac{\sin^m x}{\cos^n x} dx \quad \text{لإيجاد صيغة اختزالية للتكامل} \quad \text{مثال ٢١:}$$

نعتبر أدلة التجزئ.

$$\frac{d}{dx} \frac{\sin^{n-1} x}{\cos^{n-1} x} = [(n-1) \sin^{n-2} x \cos^n x + (n-1) \sin^n x \cos^{n-2} x]$$

$$/ \cos^{2n-2} x$$

$$= (n-1) \frac{\sin^{n-2} x}{\cos^{n-2} x} + (n-1) \frac{\sin^n x}{\cos^n x}$$

بتكامل الطرفين نحصل على

$$(n-1) I_{m,n} = \frac{\sin^{n-1} x}{\cos^{n-1} x} - (n-1) I_{m-2,n-2}$$

$$I_{m,n} = \int \frac{\cos mx dx}{\cos^n x} \quad \text{مثال ٢٢: سوف نوجد صيغة اختزالية للتكامل}$$

$$I_{m,n} = \int \frac{\cos mx + \cos (m-2) x - \cos (m-2) x}{\cos^n x} dx$$

$$= \int \frac{2 \cos (m-1) x \cos x - \cos (m-2) x}{\cos^n x} dx$$

$$= 2 I_{m-1,n-1} - I_{m-2,n}$$

مثال ٢٢: * نعتبر التكامل

$$I_{m,n} = \int \frac{\cos mx}{\cos nx} dx$$

$$I_{m,n} = \int \frac{\cos mx + \cos(m-2n)x - \cos(m-2n)x}{\cos nx} dx$$

$$= \int \frac{2 \cos(m-n)x \cos nx - \cos(m-2n)x}{\cos nx} dx$$

$$= 2 \frac{\sin(m-n)x}{m-n} - I_{m-2n,n}$$

مثال ٢٤: * يمكن إيجاد صيغة إختزالية للتكامل

$$I_{n,n} = \int \cos^n x \sin^n x dx$$

$$I_{n,n} = - \int \cos^n x \sin^{n-1} x d \cos x = - \frac{1}{m+1} \int \sin^{n-1} x d \cos^{m+1} x$$

$$= - \frac{1}{m+1} \sin^{n-1} x \cos^{m+1} x + \frac{n-1}{m+1} \int \cos^{m+2} x \sin^{n-2} x dx$$

$$= (m+1) I_{n,n} = - \sin^{n-1} x \cos^{m+1} x$$

$$+ (n-1) \int \cos^n x (1 - \sin^2 x) \sin^{n-2} x dx$$

$$i.e., (m+1) I_{n,n} = - \sin^{n-1} x \cos^{m+1} x + (n-1) [I_{n,n-2} - I_{n,n}]$$

$$or (m+n) I_{n,n} = - \sin^{n-1} x \cos^{m+1} x + (n-1) I_{n,n-2}$$

مثال ٢٥: إذا كان $m \geq 2$

$$I_{n,n} = \int \sin^n x \sin nx dx$$

لوجد صيغة إختزالية تربط $I_{n,n}$ مع $I_{n-2,n}$

يمكن إيجاد صيغة إختزالية بالتكامل

$$I_{n,n} = - \frac{1}{n} \int \sin^n x d \cos nx \quad m \geq 2$$

$$= -\frac{1}{n} [\sin^m x \cos nx] + \frac{m}{n} \int \sin^{m-1} x \cos x \cos nx \, dx$$

$$\Rightarrow n I_{m,n} = -\sin^m x \cos nx + \frac{m}{n} \int \sin^{m-1} x \cos x \, d \sin nx$$

$$n I_{m,n} = -\sin^m x \cos nx + \frac{m}{n} [\sin^{n-1} x \cos x \sin nx]$$

$$- \frac{m}{n} \int \sin nx [(m-1) \sin^{m-2} x \cos^2 x - \sin^m x] \, dx$$

$$\Rightarrow n^2 I_{m,n} = -n \sin^m x \cos nx + m \sin^{m-1} x \cos x \sin nx$$

$$- m(m-1) [I_{m-2,n} - I_{m,n}] + m I_{m,n}$$

$$\Rightarrow I_{m,n} [n^2 - m^2 + m - m] = -n \sin^m x \cos nx$$

$$+ m \sin^{m-1} x \cos x \sin nx - m(m-1) I_{m-2,n}$$

$$\text{i.e. } (n^2 - m^2) I_{m,n} = -n \sin^m x \cos nx$$

$$+ m \sin^{m-1} x \cos x \sin nx - m(m-1) I_{m-2,n}$$

$$\text{بوضع } J_{m,n} = \int_0^{\pi/2} \sin^m x \sin nx \, dx \text{ نحصل على الصيغة}$$

الإختزالية

$$(n^2 - m^2) J_{m,n} = -m(m-1) J_{m-2,n}$$

مثال ٢٦: يمكن إيجاد صيغة إختزالية لتكامل

$$I_n = \int \frac{dx}{(a+b \cos x)^n}$$

كالتالى:

$$I_n = \int -\frac{(a+b \cos x)}{(a+b \cos x)^{n+1}} dx = a I_{n+1} + b \int \frac{d \sin x}{(a+b \cos x)^{n+1}}$$

$$= a I_{n+1} + b \frac{\sin x}{(a+b \cos x)^{n+1}}$$

$$- b^2 (n+1) \int \sin x (a+b \cos x)^{-n-2} \sin x dx$$

$$= a I_{n+1} + \frac{b \sin x}{(a+b \cos x)^{n+1}} - (n+1) \int \frac{b^2 \sin^2 x dx}{(a+b \cos x)^{n+2}}$$

$$= a I_{n+1} + \frac{b \sin x}{(a+b \cos x)^{n+1}}$$

$$- (n+1) \int \frac{b^2 - a^2 + 2a(a+b \cos x) - (a+b \cos x)^2}{(a+b \cos x)^{n+2}} dx$$

$$= a I_{n+1} + \frac{b \sin x}{(a+b \cos x)^{n+1}} - (n+1) (b^2 - a^2) I_{n+2}$$

$$- 2a(n+1) I_{n+1} + (n+1) I_n$$

بوضع $n-2$ بدلا من n نحصل على

$$(n-1) (a^2 - b^2) I_n = -b \frac{b \sin x}{(a+b \cos x)^{n-1}}$$

$$+ (2n-3) a I_{n-1} - (n-2) I_{n-2}$$

مثال ٢٧: لإيجاد صيغة إختزالية للتكامل

$$I_{n,2} = \int \frac{\sin^2 x}{x^n} dx$$

نستخدم التكامل بالتجزئ

$$I_{n,n} = \frac{1}{-n+1} \int \sin^n x dx^{-n+1}$$

$$\rightarrow (1-n) I_{n,n} = \left[\frac{\sin^n x}{x^{n-1}} - \int \frac{m \sin^{n-1} x \cos x}{x^{n-1}} dx \right]$$

$$\rightarrow (2-n) (1-n) I_{n,n} = (2-n) \frac{\sin^n x}{x^{n-1}}$$

$$-m \int \sin^{n-1} x \cos x dx^{-n+2}$$

$$\rightarrow (n-1) (n-2) I_{n,n} = -(n-2) \frac{\sin^n x}{x^{n-1}} - m \left[\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{x^{n-2}} \right]$$

$$+ m \int \frac{(m-1) \sin^{n-2} x \cos^2 x - \sin^n x}{x^{n-2}} dx$$

$$\rightarrow (n-1) (n-2) I_{n,n} = -(n-2) \frac{\sin^n x}{x^{n-1}} - m \frac{\sin^{n-1} x \cos x}{x^{n-2}}$$

$$+ m(m-1) \int \frac{\sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x)}{x^{n-2}} - m I_{n,n-2}$$

$$(n-1) (n-2) I_{n,n} = -(n-2) \frac{\sin^n x}{x^{n-1}} - m \frac{\sin^{n-1} x \cos x}{x^{n-2}}$$

$$+ m(m-1) I_{n-2,n-2} - m(m-1) I_{n,n-2} - m I_{n,n-2}$$

$$i.e., (n-1) (n-2) I_{n,n} = -(n-2) \frac{\sin^n x}{x^{n-1}} - m \frac{\sin^{n-1} x \cos x}{x^{n-2}}$$

$$- m^2 I_{n,n-2} + m(m-1) I_{n-2,n-2}$$

مثال ٢٨: أوجد صيغة إختزالية للتكامل

$$V_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{x^n} dx$$

حيث $m \geq n$ و
وكلاهما إما زوجيان في آن واحد أو فرديان
في آن واحد.

بما أن

$$\frac{\sin^2 x}{x^{n-1}}, \quad \frac{\sin^{n-1} x \cos x}{x^{n-2}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0.$$

من ثم يمكن كتابة الصيغة الإختزالية السابقة بالشئنة

$$(n-1)(n-2) V_{n,n} = -m^2 V_{n,n-2} - m(m-1) V_{n-2,n-2}$$

مثال ٢٩: إذا كان

$$\begin{aligned} \pi/2 \quad r > 0 \\ \int_0^{\pi/2} \frac{\sin r\theta}{\theta} d\theta &= 0 \quad r = 0 \\ -\pi/2 \quad r < 0 \end{aligned}$$

وكان

$$\begin{aligned} +\frac{\pi r}{2} \quad r > 0 \\ \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 r\theta}{\theta^2} d\theta &= 0 \quad r = 0 \\ -\frac{\pi r}{2} \quad r < 0 \end{aligned}$$

أوجد

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin^3 \theta}{\theta} d\theta$$

لإيجاد I نلجأ للتعبير عن
بدلالة النسب المتشعبة لمضاعفات
الزاوية θ حيث لا نستطيع تطبيق الصيغة الإختزالية في المثال السابق

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin^3 \theta}{\theta} d\theta = \int_0^{\infty} \frac{1}{4} \frac{3 \sin \theta - \sin 3\theta}{\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{4} [3 - 1] \frac{\pi}{2} = \pi/4$$

مثال ٣٠: إثبت أن

$$(n-1) \int \frac{\ln x}{(1+x)^n} dx = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2(1+x)^2} + \dots + \frac{1}{(n-2)(1+x)^{n-2}} \\ + \ln \frac{x}{1+x} - \frac{\ln x}{(1+x)^{n-1}}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^n} \quad \text{من ثم أوجد}$$

بالتكامل بالتجزئ

$$\int \frac{\ln x}{(1+x)^n} dx = \int \frac{\ln x}{1-n} d(1+x)^{-n+1} \\ = \frac{1}{1-n} \left[\frac{\ln x}{(1+x)^{n-1}} - \int \frac{dx}{x(1+x)^{n-1}} \right] \\ \Rightarrow (n-1) \int \frac{\ln x}{(1+x)^n} dx = - \frac{\ln x}{(1+x)^{n-1}} + \int \frac{dx}{x(1+x)^{n-1}}$$

يمكن إجراء التكامل في الطرف الأيمن بإيجاد الكسور الجزئية لموضوع

التكامل بوضع $t=1+x$

$$\frac{1}{x(1+x)^{n-1}} = \frac{1}{(t-1)t^{n-1}} \\ = \frac{A}{t-1} + \frac{B_{n-1}}{t^{n-1}} + \dots + \frac{B_1}{t}$$

يمكن إيجاد المجاميل A, B_{n-1}, \dots, B_1 بفك $\frac{1}{(t-1)t^{n-1}}$ بذات الحدين ومقارنة الحدود المنتظرة.

$$- \frac{1}{t^{n-1}} (1-t)^{-1} = - \frac{1}{t^{n-1}} (1+t+t^2+\dots)$$

من ثم

$$B_{n-1} = \dots = B_1 = -1, A = 1$$

وعليه

$$(n-1) \int \frac{\ln x}{(1+x)^n} dx = -\frac{\ln x}{(1+x)^{n-1}} + \int \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(1+x)^2} - \dots - \frac{1}{(1+x)^{n-1}} \right] dx$$

$$= -\frac{\ln x}{(1+x)^{n-1}} + \ln \frac{x}{1+x} + \frac{1}{1+x}$$

$$+ \frac{1}{2(1+x)} + \frac{1}{(n-2)(1+x)^{n-2}} + C$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^n} dx \quad \text{لحساب}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^n} dx = \frac{1}{n-1} \left[\frac{-\ln x}{(1+x)^{n-1}} + \frac{\ln x}{1+x} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{1+x} + \dots + \frac{1}{(n-2)(1+x)^{n-2}} \right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{(n-1)} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-2} \right]$$

تمارين

١ - أوجد تكاملات النوال الآتية بالنسبة إلى x

$$\ln^2 x, x^2 \ln^2 x, x \sin^{-1} x, x^3 \sin ax, \tan^{-1} x / x^2, \\ x^3 \sqrt{1+x^2}, \sin^5 x \cos^3 x, \sin^2 x \cos 3x, x \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) \\ , x^2 \ln(1-x^2)$$

٢ - أوجد قيم التكاملات بالنسبة إلى x الآتى موضوعها

$$\frac{x}{(x-a)(x-b)(x-c)}, \frac{x}{(x-a)^2(x-b)}, \frac{x}{(x-a)^2(x-b)^2}, \\ \frac{x}{(x-a)^3}$$

٣ - أوجد تكاملات بالنسبة إلى x الآتى موضوعها

$$\frac{x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}, \frac{x^3}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} \\ , \frac{x^2-a^2}{x(x^2+a^2)}, \frac{x^2-a^2}{x(x^2+a^2)^2}$$

٤ - أوجد قيم التكاملات بالنسبة إلى x الآتى موضوعها

$$\frac{x}{1+x^3}, \frac{x^3}{(x-1)^2(x^3+1)}, \frac{1}{x^4+1}, \frac{1}{1+x^2+x^4}$$

٥ - أوجد

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}, b > a$$

أ - باستخدام التعويض $(b-x)/(x-a) = t^2$

ب - باستخدام التعويض $x = a \cos^2 \theta + b \sin^2 \theta$

٦- أوجد $\int \frac{x^3 dx}{(x^2+1)^3}$ باستخدام

أ - التعويض $x = \tan \theta$

ب - التعويض $x^2+1=u$

٧ - استخدم التعويض $2x+a+b = \frac{1}{2} (a-b) (t^2 + \frac{1}{t^2})$ أو بضرب

البسط والمقام في $\sqrt{x+a} - \sqrt{x+b}$ (حيث $a > b$) لإثبات أن

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}} = \frac{1}{2} \sqrt{a-b} (t + \frac{1}{3t^3});$$

٨ - أوجد قيم التكاملات بالنسبة إلى x التي موضوعها النوال الآتية:

$$\frac{1}{x} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}, \frac{x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}, \sqrt[3]{\frac{2+x}{3-x}}$$

٩ - أوجد قيم التكاملات بالنسبة إلى x التي موضوعها:

$$x^4 \sqrt{1-x^2}, \frac{1}{x^3 \sqrt{1+x^3}}, \frac{x^6}{\sqrt{x^2+1}}, (4x^2+3)^{-5/2}$$

$$x^2 (1+2x^3)^{1/2}, (ax^2+b)^{3/2}, x^{2/3} (2+x^{1/3})^{4/3}, x^3 (1-x^{2/3})^{2/3}$$

$$\frac{1}{x(1+x^5)}, \frac{1}{(a+x)\sqrt{b+x}}, \frac{x^2+1}{x\sqrt{4x^2+1}}, \frac{1}{x^3\sqrt{x^2+a^2}}$$

١٠ - أوجد

$$\int \frac{x+3}{(x^2+2x+3)^{7/2}} dx, \int \frac{dx}{(x^2+x-2)\sqrt{x^2+2x+3}}$$

١١ - أوجد

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+3}}, \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}, \int \frac{\sqrt{x^2+2x+4}}{(x-1)^2} dx$$

١٢ - أوجد قيم التكاملات بالنسبة إلى x التي موضوعها:

$$\frac{1}{13+5\cos x}, \frac{\cos^2 x + 2\sin^2 x}{2\cos^2 x + 3\sin^2 x}, \cos^3 x \sqrt{\sin x}, \cos^2 x \sin 3x$$

١٣ - أوجد

$$\int \frac{(x+1)}{(x^2+4)\sqrt{x^2+9}} dx, \int \frac{dx}{x^2(2+x^3)^{5/3}}$$

١٤ - أثبت باستخدام التعويض $y = \sqrt{ax^2+2bx+c} / (x-p)$ أن

$$\int \frac{dx}{(x-p)\sqrt{ax^2+2bx+c}} = \int \frac{dy}{\sqrt{dy^2-c}}$$

حيث

$$d = ap^2 + 2bp + c, e = ac - b^2$$

١٥ - أثبت أن التعويض $x = (1+y^2)/(3-y^2)$ يحول التكامل

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2+2x+1}}$$

إلى تكامل لدالة نمجية

١٦ - استخدم التعويض $u^2 = x+1+x^{-1}$ لحساب

$$\int \frac{x-1}{x+1} \frac{dx}{\sqrt{x(x^2+x+1)}}$$

١٧ - استخدم التعويض $x = a + (b-a)y$ لإثبات أن

$$\int_a^b (x-a)^m (b-x)^n dx = (b-a)^{m+n+1} \frac{m! n!}{(m+n+1)!}$$

لأي أعداد صحيحة موجبة m, n

إثبت صحة الصيغة الإختزالية الآتية:

$$18 - I_n = \int \cos^n x dx = \frac{1}{n} [\sin x \cos^{n-1} x + (n-1) I_{n-2}]$$

$$19- I_n = \int \sin^n x \, dx = \frac{1}{n} [-\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) I_{n-2}]$$

$$20- I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$21- I_n = \int \sec^n x \, dx = \frac{\sin x \sec^{n-1} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}$$

$$22- I_n = \int \frac{\sin nx}{\sin x} \, dx \rightarrow (n-1) (I_n - I_{n-2}) = 2 \sin(n-1)x$$

$$23- I_{m,n} = \int x^m (\ln x)^n \, dx \rightarrow (m+1) I_{m,n} = x^{m+1} (\ln x)^n - n I_{m,n-1}$$

$$24- I_{m,n} = \int \cos^m x \sin^n x \, dx$$

$$\rightarrow (m+n) I_{m,n} = -\cos^{m+1} x \sin^{n-1} x + (n-1) I_{m,n-2}$$

$$= \cos^{m-1} x \sin^{n+1} x + (m-1) I_{m-2,n}$$

$$25- I_{m,n} = \int \cos^m x \sin^n x \, dx$$

$$\rightarrow (m+n) I_{m,n} = -\cos^m x \cos nx + m I_{m-1,n-1}$$

٢٦ - أوجد صيغ إختزالية لتكاملات الدوال الآتية بالنسبة إلى x

$$x^n \sqrt{1-x^2}, \quad x^n / \sqrt{1+x^2}, \quad \cos nx \sin^m x, \quad (ax^2 + 2bx + c)^{-n}$$



دوال بيتا وجاما

Beta and Gamma functions

١-٣ دالة جاما

لقيم $x > 0$ يتقارب التكامل $\int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ ويسمى دالة جاما ويرمز لها بالرمز

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

بإجراء تكامل بالتجزئ نحصل على

$$\Gamma(x) = [-t^{x-1} e^{-t}]_0^{\infty} + (x-1) \int_0^{\infty} t^{x-2} e^{-t} dt = (x-1) \Gamma(x-1).$$

$$\text{or } \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

إذا كان x عددا صحيحا موجبا فإن

$$\Gamma(x) = (x-1)(x-2)(x-3) \dots 3.2.1\Gamma(1),$$

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1;$$

من ثم

العلاقة $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ تقدم وسيلة لحساب دالة جاما لأي عدد موجب أكبر من الوحدة بدلالة دالة جاما لعدد موجب أقل من الوحدة كما تقدم وسيلة لتعريف $\Gamma(x)$ لقيم x السالبة حيث تعرف

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \Gamma(x+1)$$

مثال ١: أوجد $I = \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^3} dx$ $\Gamma(x) = (x-1)!$

بوضع $x^3 = t$ نحصل على

$$I = \int_0^{\infty} t^2 \frac{1}{3} t^{-2/3} e^{-t} dt = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} t^{4/3} e^{-t} dt = \frac{1}{3} \Gamma(7/3)$$

٢-٣ تحويلات دالة جاما

١ - بوضع $y = e^{-t}$ نحصل على

$$\Gamma(x) = \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{y}\right)^{x-1} dy$$

٢ - بوضع kt بدلاً من t نحصل على

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-kt} k^x t^{x-1} dt$$

$$i.e. \quad \int_0^{\infty} e^{-kt} t^{x-1} dt = \frac{\Gamma(x)}{k^x}$$

٣ - بوضع $t^x = y$ نحصل على

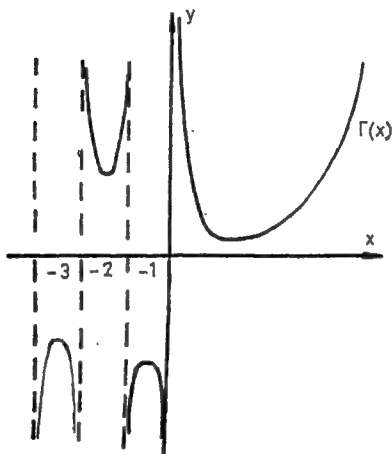
$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \int_0^{\infty} e^{-y^{1/x}} dy$$

$$i.e. \quad \int_0^{\infty} e^{-y^{1/x}} dy = x \Gamma(x) = \Gamma(x+1)$$

بوضع $x = \frac{1}{2}$ نحصل على

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$$

منحنى دالة جاما موضح بالشكل مع جدول لبعض قيم $\Gamma(x)$



| | | | | | |
|-------------|---|--------|--------|--------|---|
| x | 1 | 1.25 | 1.5 | 1.75 | 2 |
| $\Gamma(x)$ | 1 | 0.9064 | 0.8862 | 0.9191 | 1 |

مثال ٢: إثبت أنه إذا كان n عددا صحيحا موجبا فإن

$$1.3.5 \dots (2n-1) \sqrt{\pi} = 2^n \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

للحل: نبدأ بالطرف الأيمن

$$2^n \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = 2^n \left\{ \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) \dots \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right\}$$

$$= 2^n \left\{ \frac{2n-1}{2} \frac{2n-3}{2} \dots \frac{3}{2} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right\}$$

$$= \{(2n-1)(2n-3) \dots 3 \cdot 1\} \sqrt{\pi}$$

مثال ٣: إذا كان k ثابتاً موجباً، أثبت أن

$$I = \int_0^k \left(\int_0^{k-x} e^{-(x+y)} x^{n-1} y^{n-1} dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 (1-v)^{n-1} v^{n-1} dv \int_0^k e^{-u} u^{2n-1} du$$

الحل: بوضع $x+y=u, y=uv$ نحول شريحة المساحة $dx dy$ إلى $u du dv$ ، ونحول منطقة التكامل إلى المنطقة المحددة بالمنحنيات الزمنية:

$$u=0, v=0, v=1, u=k$$

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^k e^{-u} [u(1-v)]^{n-1} (uv)^{n-1} u du \right) dv$$

$$= \int_0^1 (1-v)^{n-1} v^{n-1} dv \cdot \int_0^k e^{-u} u^{2n-1} du$$

٣-٣ دالة بيتا

يتقارب التكامل $\int_0^1 t^{m-1} (1-t)^{n-1} dt$ لقيم $m > 0, n > 0$ ، ويطلق

عليه دالة بيتا في المتغيرين m, n ويرمز له بالرمز $\beta(m, n)$

$$\beta(m, n) = \int_0^1 t^{m-1} (1-t)^{n-1} dt$$

بالتكامل بالتجزئ يمكن الحصول على علاقة تكرارية كالتى

$$\beta(m, n) = \left[\frac{t^m}{m} (1-t)^{n-1} \right]_0^1 + \frac{n-1}{m} \beta(m+1, n-1) \quad (m > 0, n > 1)$$

i.e. $m \beta(m, n) = (n-1) \beta(m+1, n-1)$ ←

٣-٤ تحويلات دالة بيثا

١- بوضع $t=1-u$ نحصل على

$$\beta(m, n) = \int_0^1 u^{n-1} (1-u)^{m-1} du = \beta(n, m) \quad \swarrow$$

٢- بوضع $t = \sin^2 \theta$ نحصل على

$$\beta(m, n) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} \theta \cos^{2m-1} \theta d\theta \quad \swarrow$$

٣- بوضع $t = \frac{y}{1+y}$ نحصل على

$$\beta(m, n) = \int_0^\infty \frac{y^{n-1}}{(1+y)^{m+n}} dy$$

٥- علاقة بين نوال بيثا وجاما

سوف نثبت أن دالة بيثا يمكن التعبير عنها بدلالة نوال جاما
نعتبر التكامل الشكلي

$$I = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-xy} (xy)^{n-1} e^{-x} x^n dx dy$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x(y+1)} x^{m+n-1} y^{n-1} dx dy$$

$$= \int_0^\infty \frac{y^{n-1}}{(1+y)^{m+n}} \Gamma(m+n) dy = \Gamma(m+n) \beta(m, n)$$

بعكس ترتيب التكامل

$$I = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x} x^{m+n-1} y^{n-1} e^{-xy} dy dx$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-x} x^{m+n-1} \frac{\Gamma(m)}{x^m} dx = \Gamma(m) \Gamma(n)$$

من ثم

$$\rightarrow \beta(m, n) = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \leftarrow$$

نعرض الآن لبعض النتائج المرتبطة بالعلاقة السابقة:

$$(i) \quad \beta(m+n, p) = \frac{\Gamma(m+n) \Gamma(p)}{\Gamma(m+n+p)}$$

$$\beta(m, n) \beta(m+n, p) = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n) \Gamma(p)}{\Gamma(m+n+p)}$$

وحيث أن العلاقة الأخيرة متماثلة في m, n, p من ثم

$$\beta(m, n) \beta(m+n, p) = \beta(n, p) \beta(n+p, m) = \beta(p, m) \beta(p+m, n)$$

بوضع $\frac{a}{x} - \frac{b}{y} = (a-b)$ في علاقة دالة بيثا نحصل على

$$\beta(m, n) = \int_0^1 y^{m-1} (1-y)^{n-1} dy = a^m b^n \int_0^1 \frac{x^{m-1} (1-x)^{n-1}}{[a + (b-a)x]^{m+n}} dx$$

بوضع $b-a = c$ نحصل على

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1} (1-x)^{n-1}}{[a + cx]^{m+n}} dx = \frac{1}{a^m} \frac{1}{(a+c)^n} \beta(m, n)$$

بوضع $x = \sin^2 \theta$ نحصل على

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2m-1} \theta \cos^{2n-1} \theta}{(a \cos^2 \theta + b \sin^2 \theta)^{m+n}} d\theta = \frac{1}{2a^m b^n} \beta(m, n)$$

من التكامل $\beta(m, n) = \int_0^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}} dx$ ويوضع $m+n=1$ نحصل على

$$(iv) \int_0^{\infty} \frac{x^{n-1}}{1+x} dx = \Gamma(n) \Gamma(1-n)$$

حيث m كسر صحيح موجب.

نتيجة هامة:

سوف نثبت أن

$$\left(\Gamma(n) \Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi} \right) \quad 0 < n < 1$$

نعتبر التكامل

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^{n-1}}{1+x} dx \quad 0 < n < 1$$

$$= \left(\int_0^1 + \int_1^{\infty} \right) \left(\frac{x^{n-1}}{1+x} dx \right) = I_1 + I_2$$

$$I_2 = \int_1^{\infty} \frac{x^{n-1}}{1+x} dx = \int_1^0 \frac{y^{1-n}}{1+1/y} \left(-\frac{1}{y^2} dy \right) \quad (\text{put } x = \frac{1}{y})$$

$$= \int_0^1 \frac{y^{-n}}{1+y} dy$$

$$\text{i.e. } I = \int_0^1 \frac{x^{n-1} + x^{-n}}{1+x} dx$$

$$= \int_0^1 (x^{n-1} + x^{-n}) (1 - x + x^2 - \dots + (-1)^k x^k) dx$$

$$+ (-1)^{k+1} \int_0^1 x^{k+1} \frac{x^{n-1} + x^{-n}}{1+x} dx$$

$$= \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{1+n} + \frac{1}{2+n} - \frac{1}{3+n} + \dots + (-1)^k \frac{1}{k+n} \right. \\ \left. + \frac{1}{1-n} - \frac{1}{2-n} + \frac{1}{3-n} - \dots - (-1)^k \frac{1}{k-n} + (-1)^k \frac{1}{k-n+1} \right\}$$

$$+ (-1)^{k+1} \int_0^1 x^{k+1} \frac{x^{n-1} + x^{-n}}{1+x} dx$$

عندما تكبر k بدون حد ينعدم الحد الأخير في المتسلسلة وهو

$$(-1)^k \frac{1}{k-n+1}$$

$$\int_0^1 x^{k+1} \frac{x^{n-1} + x^{-n}}{1+x} dx$$

وذلك لأن x كسر صحيح موجب في الفترة $(0, 1)$.

أيضاً من مفكوك

$$\operatorname{cosec} z = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+\pi} - \frac{1}{z-\pi} + \frac{1}{z+2\pi} +$$

$$+ \frac{1}{z-2\pi} + \frac{1}{z+3\pi} - \frac{1}{z-3\pi} + \dots$$

نرى أن

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{1+n} + \frac{1}{1-n} + \frac{1}{2+n} - \frac{1}{2-n} + \dots = \pi / \sin n\pi$$

من ثم

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{n-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin n\pi} = \Gamma(n) \Gamma(1-n) \quad 0 < n < 1$$

مثال ٤: أوجد $\int_0^1 x^{3/4} (1-x)^{-3/4} dx$ الحل:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{3/4} (1-x)^{-3/4} dx &= \beta\left(\frac{7}{4}, \frac{1}{4}\right) = \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{7}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma(2)} = \frac{3}{4} \frac{\pi}{\sin(\pi/4)} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \pi \end{aligned}$$

نتائج هامة:

١ - سوف نثبت أن

$$2^p \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p+2}{2}\right) = \sqrt{\pi} \Gamma(p+1)$$

من تعريف دالة بيتا

$$\beta(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$

$$\therefore \beta(p, p) = \int_0^1 (x-x^2)^{p-1} dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2\right]^{p-1} dx$$

حيث أن موضع التكامل يعطى قيما متساوية عند وضع $x = \frac{1}{2} + h$ أو $x = \frac{1}{2} - h$ من ثم يكون موضوع التكامل متماثلاً حول $x = \frac{1}{2}$ وعليه

$$\beta(p, p) = 2 \int_0^{1/2} \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2\right]^{p-1} dx$$

بوضع $\frac{1}{2} - x = \frac{\sqrt{z}}{2}$ نحصل على

$$\beta(p, p) = 2 \int_1^0 \frac{1}{2^{2p-2}} (1-z)^{p-1} \left(-\frac{1}{4} z^{-1/2}\right) dz$$

$$= \frac{1}{2^{2p-1}} \int_0^1 z^{-1/2} (1-z)^{p-1} dz = \frac{1}{2^{2p-1}} \beta\left(\frac{1}{2}, p\right)$$

$$\text{i.e., } \frac{\Gamma(p)\Gamma(p)}{\Gamma(2p)} = \frac{1}{2^{2p-1}} \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(p)}{\Gamma(p+1/2)}$$

$$\text{or } 2^{2p-1} \Gamma(p)\Gamma(p+1/2) = \sqrt{\pi} \Gamma(2p)$$

بوضع $2p=q+1$ نحصل على

$$2^q \Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{q+2}{2}\right) = \sqrt{\pi} \Gamma(q+1)$$

٢ - يمكن أن نثبت باستخدام التكامل الكنتورى على ربع دائرة أن

$$\int_0^\infty t^{k-1} \frac{\cos(t)}{\sin(t)} dt = \Gamma(k) \frac{\cos(k\pi/2)}{\sin(k\pi/2)} \quad 0 < k < 1$$

$$I = \int_b^a (x-b)^{m-1} (a-x)^{n-1} dx \quad \text{مثال ٥: لوجد}$$

$$\text{بوضع } \frac{x-b}{a-b} = u \quad \text{نحصل على}$$

$$I = \int_0^1 [(a-b)u]^{m-1} [(a-b)(1-u)]^{n-1} (a-b) du$$

$$= (a-b)^{m+n-1} \int_0^1 u^{m-1} (1-u)^{n-1} du = (a-b)^{m+n-1} \beta(m, n)$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \tan^n x dx \quad \text{مثال ٦: لوجد}$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \sec^n x dx = \frac{1}{2} \beta\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1-n}{2}\right)$$

مثال ٧: إثبت أن

$$\Gamma = \int_0^1 \frac{x^{-3} dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{(\Gamma(3/4))^2}{\sqrt{2\pi}}$$

بوضع $x^4 = u$ نحصل على

$$\Gamma = \int_0^1 u^{1/2} (1-u)^{-1/2} \left(\frac{1}{4} u^{-3/4}\right) du$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^1 u^{-1/4} (1-u)^{-1/2} du = \frac{1}{4} \beta\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{5}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \sqrt{\pi} / \frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = \sqrt{\pi} \frac{(\Gamma(3/4))^2}{\Gamma(3/4) \Gamma(1/4)}$$

$$= \sqrt{\pi} \frac{(\Gamma(3/4))^2}{\pi / (\sin \frac{\pi}{4})}$$

مثال: إحص (3.5)

من الصيغة $\Gamma(P + 1/2) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(2P)}{2^{2P-1} \Gamma(P)}$ والمسماه بالصيغة المضاعفة

$$\Gamma(3.5) = \frac{5! \sqrt{\pi}}{2^5 2!} \text{ نحصل على (douplification formula)}$$

١ - إثبت أن

$$(a) \quad \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{5}{6}\right) = \sqrt{\pi} 2^{1/3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$(b) \quad \sqrt{3} \{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\}^2 = \sqrt{\pi} 2^{1/3} \Gamma\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$(c) \quad \Gamma(0.1) \Gamma(0.2) \dots \Gamma(0.9) = \frac{(2\pi)^{9/2}}{\sqrt{10}}$$

$$(d) \quad \Gamma\left(\frac{3}{2} - x\right) \Gamma\left(\frac{3}{2} + x\right) = \left(\frac{1}{4} - x^2\right) \pi \sec \pi x \quad -1 < x < 1$$

٢ - احسب التكاملات الآتية مستعينا بنوال بيثا وجاما

$$(a) \quad \int_0^1 x^6 (1-x)^3 dx$$

$$(b) \quad \int_0^1 x^{3/2} (1-x)^{-1/2} dx$$

$$(c) \quad \int_0^\infty e^{-x^4} dx$$

$$(d) \quad \int_0^a (a^2 - x^2)^{1/2} dx$$

$$(e) \quad \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4 x}{\sqrt{\cos x}} dx$$

$$(f) \quad \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin 2x} dx$$

$$(g) \quad \int_0^\infty 4^{-9x^2} dx$$

$$(h) \quad \int_0^\infty \frac{dx}{x^n + 1}$$

$$(i) \quad \int_0^\infty \operatorname{sech}^8 x dx$$

$$(j) \quad \int_0^\infty \frac{e^{2x}}{(e^{3x} + 1)^2} dx$$

$$(k) \quad \int_0^\infty \frac{dx}{e^x \sqrt{\sinh 2x}}$$

٣ - أثبت أن

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} \ln(1/x)} = \sqrt{2\pi}$$

٤ - أثبت صحة التكاملات الآتية:

$$(i) \int_1^\infty x^{-p} (\ln x)^q dx = \frac{\Gamma(q+1)}{(p-1)^{q+1}}, p > 1, q > -1$$

$$(ii) \int_0^1 x^m (1-x^n)^p dx = \left\{ \Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right) \Gamma(p+1) \right\} \left\{ n \Gamma\left(\frac{m+1}{n} + p+1\right) \right\}$$

for $m > n-1, p > -1$

٥ - عبر عن

$$(i) \int_0^\infty e^{-ax^b} x^c dx \quad (a > 0, b > 0, c > -1)$$

$$(ii) \int_1^\infty (\log x)^m x^{-n} dx \quad (m > -1, n > 1)$$

$$(iii) \int_0^{\pi/2} (\tan^5 \theta + \tan^7 \theta) e^{-\tan^2 \theta} d\theta$$

بدلالة دالة جاما

٦ - أثبت أن

$$(5) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{n} \frac{\Gamma(1/n)}{\Gamma(1/n+1/2)} \quad n > 0$$

٧ - أثبت أنه إذا كان n عددا صحيحا موجبا فإن

$$(i) \quad \beta(m, n) = \frac{n-1}{m} \beta(m+1, n-1)$$

$$= \frac{(n-1)!}{m(m+1) \dots (m+n-1)}$$

$$(ii) \quad \beta(m+1, n) = \beta(m, n) - \beta(m, n+1)$$

$$(iii) \quad \beta(m, n+1) = \frac{n}{m+n} \beta(m, n)$$

٨ - أثبت أن

$$\Gamma(1+n) \Gamma(1-n) = \frac{n\pi}{\sin n\pi}$$

٩ - استخدم التحويل $xy=u, y=u+v$

لإثبات أن

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{(1-x)^{m-1} y^m (1-y)^{n-1}}{(1-xy)^{m+n-1}} dx dy = \beta(m, n)$$

١٠ - أثبت أن

$$(i) \quad \beta(p, q) \beta(p+q, r) = \beta(q, r) \beta(q+r, p)$$

$$(ii) \quad \beta(p, p) \beta\left(p+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}\right) = \pi / [2^{4p-1} p]$$

حيث p عدد طبيعي

١١- لوجد

$$\int_0^{\infty} \sin x^n dx \quad , \quad \int_0^{\infty} \cos x^n dx \quad n > 1$$

١٢- لوجد قيم a, b حتى لا يكون التكامل $\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x^b} dx$ متباعدة

التكاملات المتعددة

Multiple integrals



نعلم أن التكامل المحدد $\int_a^b f(x) dx$ هو نهاية مجموع. سوف
نعلم هذا المفهوم على دالة متغيرين أو أكثر. للقيام بهذه العملية نحتاج
للتعريفات الآتية:

١-٤ المجال (domain) والمنطقة (Region)

تسمى مجموعة A من النقط من فراغ مترى (X, d) مجموعة
مفتوحة (open set) إذا كان لكل نقطة a من نقط المجموعة A يوجد عدد
موجب δ بحيث تقع جميع نقط الفراغ التي تبعد عن a أقل من δ
دخل المجموعة A .

$$1.4. A \text{ is open} \Leftrightarrow \forall a \in A \exists \delta > 0 : \{x : d(x, a) < \delta\} \subset A$$

تسمى الكرة المفتوحة $B_\delta^a(a)$ المكونة من جميع النقط x التي
تبعد عن a مسافة أقل من δ جواراً أساسياً للنقطة a . بالتالى تكون
مجموعة A مفتوحة إذا وجد جوار أساسى لكل نقطة من نقطها يقع بكامله
داخل المجموعة A . تسمى نقطة b نقطة حدية (boundary) لمجموعة A
إذا كان كل جوار للنقطة b يحتوى على نقطة من A ونقطة ليست من A .
أى مجموعة تسمى مرتبطة إذا إستحال كتابتها على هيئة اتحاد مجموعتين
مفتوحتين غير متقاطعتين. نقول أن مجموعة مرتبطة إرتباطاً مسارياً إذا
كان كل نقطتين من نقطها يمكن إصالحهما بمنحنى يقع بكامل نقطه فى
المجموعة. سوف يعيننا فى هذا الباب الإرتباط المسارى فقط وللإختصار
سوف نكتب مجموعة مرتبطة لنعنى أنها مرتبطة إرتباطاً مسارياً.

المجال هو مجموعة من النقاط مفتوحة ومرتبطة. يكون المجال محدودا إذا أمكن إحاطته بمربع ذو أبعاد محدودة. المنطقة هي مجموعة من النقاط تتكون من مجال محدود مضاف إليه نقطه الحدية (مجموعة النقاط الحدية تسمى حدا أو كنتورا (Contour)).

نقبل عن منطقة ما أنها مرتبطة لارتباطها ببساطة (simply connected) إذا كان أى منطى بسيط ومغلق بداخلها يمكن أن ينكمش بشكل متصل إلى نقطة (الانكماش تعريف فى الرياضيات المتقدمة ولكننا نعتمد على البديهية) داخل المنطقة. المنطقة المرتبطة التى لارتباطها غير بسيط تسمى متعددة الارتباط (Multiply connected).



منطقة غير مرتبطة

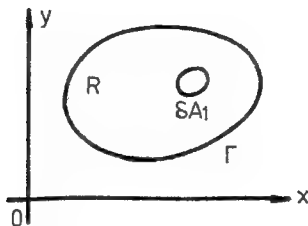
منطقة مرتبطة
ارتباط بسيط

منطقة مرتبطة
ارتباط متعدد

٢-٤ التكاملات المساحية (Area Integrals)

نتقبلية نظرية التكامل المتعدد من أوجه كثيرة مع نظرية التكامل للمحدد لدالة المتغير الواحد. لذا ستبدأ بتعريف التكامل الثنائى حيث التصميم واورد التكاملات المتعددة.

نفرض أن $f(x, y)$ دالة وحيدة القيم ومتصلة في منطقة R من مستوى x, y ومغلقة بمنحني Γ .



قسم المنطقة R إلى n من عناصر المساحات $\{\delta A_i\}$. لكل عنصر مساحي δA_i (الرمز δA_i يستخدم لمنطقة ويستخدم كمساحة) نختار نقطة من نقطه (x_i, y_i) . نكون المجموع $\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \delta A_i$ في النهاية عندما تؤول n إلى ما لا نهاية بحيث تؤول أكبر مساحة δA_i إلى الصفر (أي عندما يزيد عدد عناصر تقسيم R بدون حد. بحيث يؤول أكبر عنصر مساحة إلى الصفر) فإن نهاية هذا المجموع إن وجدت بحيث لا تعتمد على طريقة تقسيم R أو كيفية اختيار (x_i, y_i) تعرف تكامل الدالة $f(x, y)$ على المنطقة R ونكتب

$$\lim \sum f(x_i, y_i) \delta A_i = \int_R f(x, y) dA \quad (1)$$

حيث تعني \lim أن $n \rightarrow \infty$ وأن $\max \delta A_i \rightarrow 0$

للتكامل في الطرف الأيمن من الصيغة (1) عرف كنهاية مجموع كالحال عندما عرف التكامل المحدد لدالة المتغير الواحد. في

الحالة الخاصة $f(x, y) = 1$ فإن $\iint_R dA$ يعطي مساحة المنطقة R

المغلقة بالمنحنى Γ .

إذا لم تكن $f(x, y)$ متصلة في المنطقة R فإن التكامل الثنائي يمكن

ألا يتواجد ولكن وإن أمكن تقسيم R إلى عدد منتهى من المصاحات

تكون f فيها متصلة فإن التكامل يعرف (ويجب) لكل مساحة على حده وتكون قيمة التكامل على R مساوية مجموع قيم التكاملات.

على مساحة التقسيم. تسمى المنطقة R حقل التكامل (field of integration)

* إذا لم تكن $f(x, y)$ منتهية أو إذا كانت R منطقة غير منتهية فإن

التكامل الثنائي يعرف كالحال عند تعريف التكاملات المعتلة.

التقييم (الحساب) العلى للتكامل الثنائي يتطلب استخدام نظام

إحداثيات نقرر على هيئة شريحة المساحة dA . سوف نعطي منهاجاً بديها

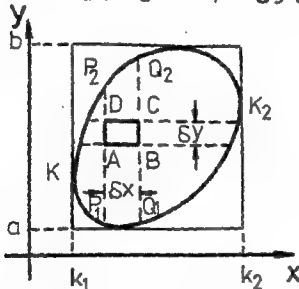
لتقييم مثل هذه التكاملات. إذا استخدمنا إحداثيات كارتيزية يمكننا أن نقسم

حقل التكامل إلى مستطيلات يشبكة من الخطوط تولزى محاور الإحداثيات.

نفرض أن AD, BC خطان رأسيان من خطوط الشبكة معادلاتهما

$x = a, x = a + \delta x$ على الترتيب وأن AB, DC خطان أفقيان من خطوط

الشبكة معادلاتهما



$$y = b, y = b + \delta y$$

على الترتيب

مساحة الشريحة dA

$$dA = \delta x \delta y$$

نفرض (عند هذه المرحلة) أن أى خط يقطع غلاف (ككتور)

المنطقة في نقطتين على الأكثر (أي أن المنطقة R مقعرة (convex)؛ في المسائل العملية يمكن تقسيم المناطق الغير مقعرة إلى عدد منتهى من المناطق المقعرة).

يمكن كتابة التكامل كالتالي:

$$\begin{aligned} \int_R f dA &= \lim_{\delta x \rightarrow 0} \sum_{\delta y} [f(x, y) \delta x \delta y] \\ &= \lim_{\delta x} \sum (\sum f(x, y) \delta y) \delta x \quad (2) \end{aligned}$$

لإجراء الجمع في (2) يجب أن نتخذ ملحقاً منظماً للجمع. حيث أن أي حد في الجمع يظايره عنصر مساحة. لذا وجب بناء عناصر المساحة بدءاً بعنصر ما حتى يكتمل حقل التكامل. يمكن أن يبدأ بناء عناصر المساحة ABCD على الشريحة $P_1 Q_1 Q_2 P_2$. يكون الجمع بالنسبة إلى δy (على هذه الشريحة يبقى كل من x وكذلك δx ثابتاً). في النهاية، يعطى الجمع بالتكامل المحدد.

$$\lim_{\delta y} \sum f(x, y) \delta y = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy = F(x) \quad \text{say,} \quad (3)$$

حيث $y_1(x), y_2(x)$ هما قيم y عند P_1, P_2 على التوالي. (لاحظ أن كل من $\delta x, \delta y$ متناهية في الصغر). الخطوة التالية من الجمع التتالي هي جمع شرائح مثل $P_1 Q_1 Q_2 P_2$ لتغطية المساحة كلها. في النهاية نحصل على تكامل آخر بالنسبة إلى x .

$$\lim_{\delta x} \sum F(x) \delta x = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx = \int_R f(x, y) dA \quad (4)$$

حيث k_1, k_2 هي قيم x المتطرفة عند K_1, K_2 على التوالي.

ومكذا

$$\int_R \int f(x, y) dA = \int_{k_1}^{k_2} \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right] dx \quad (5)$$

يمكن أيضا إجراء التكامل التتالي متعاقبا بالجمع أولا في اتجاه متغير x ثم بعد ذلك في اتجاه متغير y لنحصل

$$\int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dx dy$$

التعبير في الطرف الأيمن يسمى تكاملا متعاقبا ويمكن كتابته بالهيئة

$$\int_R \int f dA = \int_{k_1}^{k_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \quad (6)$$

$$\int_R \int f dA = \int_{k_1}^{k_2} \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy dx \quad (7)$$

ليس هناك لربطات ضرورية بين موضوع التكامل $f(x, y)$ وحقل التكامل R سوى قابلية الدالة للتكامل عليه.

التكامل التتالي معنى هندسي بسيط إذ أن حاصل الضرب $f(x, y)$ dA يمثل حجم المنشور الذي مساحته قاعدته dA وارتفاعه $z = f(x, y)$ وعليه فإن عملية التجميع (التي تتم عن طريق التكامل) تمثل الحجم المحصور بين منطقة التكامل في مستوى xy والسطح $z = f(x, y)$ وسطحه الجانبي هي رؤس تولفي محور z .

✓ للتكامل التتالي معان فيزيائية عديدة ترتبط بالمعنى الفيزيائي للدالة $f(x, y)$. إذا كانت $f(x, y)$ تمثل كثافة سطحية أعطى التكامل التتالي كتلة منطقة التكامل. إذا مثلت $f(x, y)$ درجة حرارة عند نقطة (x, y) أعطى التكامل التتالي كمية حرارة ومكذا.

?

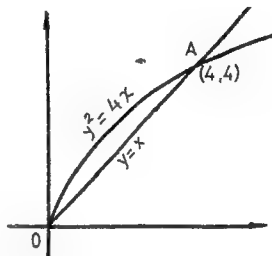
مثال ١:

$$\int_0^4 dx \int_x^{2\sqrt{x}} (28x^2 + 24xy) dy = \int_0^4 [28x^2y + 12xy^2]_x^{2\sqrt{x}} dx$$

$$= \int_0^4 [28x^{5/2} - 40x^3 + 48x^2] dx$$

$$= [8x^{7/2} - 10x^4 + 16x^3]_0^4$$

$$= 1024 - 2560 + 1024 = -512$$



حل التكامل في هذا المثال هو المنطقة المحددة بالمنحنيات

$$y^2 = 4x, y = x$$

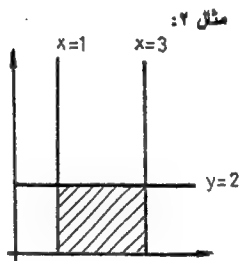
$$\int_1^3 dx \int_0^2 x^2 y e^{x+2y} dy$$

$$= \int_1^3 x^2 e^x dx \int_0^2 y e^{2y} dy$$

$$= [x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x]_1^3$$

$$[\frac{1}{2} y e^{2y} - \frac{1}{4} e^{2y}]_0^2$$

$$= \frac{1}{4} (5e^3 - e) (3e^2 - 1)$$



حل التكامل في هذا المثال هو داخل وحدود المستطيل

$$x = 1, x = 3, y = 0, y = 2$$

التكامل السابق يعطى مثالا لتكامل ثنائي قبل الفصل. بمعنى أنه

يمكن كتابته على هيئة ضرب تكاملين، فيه موضوع التكامل يسوى حاصل

ضرب دالتين أحدهما دالة في x فقط والأخرى دالة في y فقط كما أن

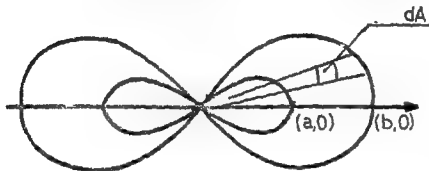
$$\int_a^b \int_c^d f(x) g(y) dx dy = \int_a^b f(x) dx * \int_c^d g(y) dy$$

لإيجاد المساحة بين منحنىي اللمنسكيت

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta, \quad r^2 = b^2 \cos 2\theta \quad b > a$$

حلل للتكامل موضح بالشكل. من المناسب أن نعتبر شريحة

مساحة $dA = r d\theta dr$ مناسبة للإحداثيات القطبية.



بأخذ تماثل المساحة حول الخط الإبتدائي وكذلك حول القطب بعين

الاعتبار يمكن حساب المساحة في الربع الأول فقط

$$A = \int_R \int dA = 4 \int_0^{\pi/4} \int_{a\sqrt{\cos 2\theta}}^{b\sqrt{\cos 2\theta}} r dr d\theta$$

$$= 4 \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2} [b^2 \cos 2\theta - a^2 \cos 2\theta] d\theta$$

$$= 2 (b^2 - a^2) \left[\frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{\pi/4} = (b^2 - a^2)$$

٢-٤ خواص التكامل الثنائي

سوف نذكر الخواص الأولية للتكامل الثنائي

$$i \quad \int_R \int dA = A \quad \text{—}$$

$$ii \quad \int_R \int k f dA = k \int_R \int f dA$$

$$iii \quad \int_R \int (f \pm g) dA = \int_R \int f dA \pm \int_R \int g dA$$

$$IV \quad R = R_1 + R_2 \Rightarrow \int_R f \, dA = \int_{R_1} f \, dA + \int_{R_2} f \, dA$$

$$V \quad f(x, y) \leq g(x, y) \Rightarrow \iint_R f \, dA \leq \iint_R g \, dA$$

$$VI \quad \left| \iint_R f \, dA \right| \leq \iint_R |f| \, dA$$

$$VII \quad \left| \iint_R f \, dA \right| \leq \max_{(x,y) \in R} |f(x, y)| A$$

إذا كانت الدالة $f(x, y)$ زوجية في x وكانت منطقة التكامل متماثلة

حول محور y فإن

$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy = 2 \iint_{R_+} f(x, y) \, dx \, dy$$

حيث R_+ هو جزء منطقة التكامل حيث $x > 0$

إذا كانت $f(x, y)$ فردية في x وكانت منطقة التكامل متماثلة حول

محور y فإن

$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy = 0$$

بصورة مطابقة - بجري الحديث عن التماثل حول محور x . إذا

كانت منطقة التكامل متماثلة حول محوري الإحداثيات وكانت f دالة زوجية

في كل من x, y فإن

$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy = 4 \iint_{R'} f(x, y) \, dx$$

حيث R' هي المنطقة من R والتي فيها $x > 0, y > 0$ بينما

$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy = 0$$

إذا كانت f فردية في أحد المتغيرين

* إذا كانت $f(x,y)$ حاصل ضرب دالتين إحداهما دالة في x فقط والأخرى دالة في y فقط وكانت نهائياً التكامل ثوابت أمكن التعبير عن التكامل الثنائي بهيئة حاصل ضرب تكاملين كل منهما دالة متغير واحد والعكس صحيح.

$$\text{i.e. } \int_a^b \int_c^d f(x)g(y)dx dy = \int_c^d f(x)dx \int_a^b g(y)dy$$

$$\text{مثال: لإيجاد } I = \int_a^b \int_c^d \frac{xy}{1+x^2+y^2+x^2y^2} dx dy \text{ نعتبر}$$

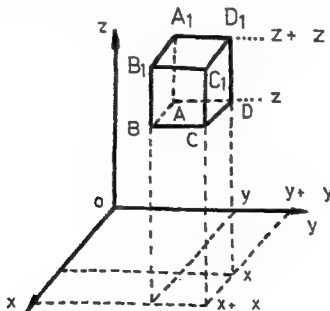
$$\begin{aligned} I &= \int_a^b \int_c^d \frac{xy}{(1+x^2)(1+y^2)} dx dy = \int_c^d \frac{ydy}{1+y^2} \int_a^b \frac{xdx}{1+x^2} \\ &= \frac{1}{2} \ln \left[\frac{1+d^2}{1+c^2} \right] \cdot \frac{1}{2} \ln \left[\frac{1+b^2}{1+a^2} \right] \end{aligned}$$

٤-٤ التكاملات الحجمية (Volume Integrals)

سوف نعلم عملية التكاملات المساحية إلى تكاملات حجمية. نعتبر دالة موضع $f(x, y, z)$ حيث (x, y, z) هي إحداثيات نقطة منسوبة لنظام إحداثيات كارتيزية. نفرض أن هذه الدالة وحيدة القيم ومتصلة على منطقة مقعرة R محاطة بسطح $\Phi(x, y, z) = c$. الحالات التي فيها R غير مقعرة أو أن للدالة بعض مواضع عدم إتصال يمكن أن تعالج كما هو الحال في التكاملات المساحية. قسم المنطقة R إلى n من العناصر الحجمية للصغيرة $\{\delta V_i\}$. نختار نقطة (x_i, y_i, z_i) من كل شريحة حجمية δV_i . نكون الجمع $\sum f(x_i, y_i, z_i) \delta V_i$ مأخوذاً على جميع العناصر الحجمية. يعرف التكامل الحجمي أو الثلاثي على المنطقة R بأنه القيمة النهائية للجمع عندما تؤول n إلى المالا نهاية وتؤول أكبر شريحة حجم δV_{\max} إلى الصفر حيث نكتب

$$\lim \sum f \delta V = \iiint_R f dV \quad (8)$$

حيث تعنى \lim أن $\delta V_{\max} \rightarrow 0$ عندما تؤول n إلى المالا نهاية



بتم حساب التكامل الحجمى بتعميم طريقة التكامل المساحى.

بإستخدام نظام إحداثيات كارتيزية. نقسم المنطقة R إلى شبكة من العناصر الحجمية بمستويات $z = \text{const}$, $y = \text{const}$, $x = \text{const}$ مثل

$AB = \delta x$, $BC = \delta y$, $AA_1 = \delta z$ وبذا فإن $\delta V = \delta x \delta y \delta z$. من ثم

$$\iiint_R F(x, y, z) dV = \lim_{\delta x \delta y \delta z} \sum \sum \sum F(x, y, z) \delta x \delta y \delta z \quad (9)$$

والنهاية هنا تعنى أن جميع δx_{\max} , δy_{\max} , δz_{\max} تؤول إلى الصفر عندما يزداد عدد العناصر المداخية بنون حد. يجرى الجمع الثلاثى ببناء الحجوم بطريقة منتظمة لملأ المنطقة R يمكن مثلاً التجميع على δz لتكوين عمود بحيث يقطع أسفل العمود سطح المنطقة R فى نقطة $z_1(x, y)$ ويقطع أعلى العمود السطح فى نقطة $z_2(x, y)$ نلج هذا الجمع هو $\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} F(x, y, z) dz$ وفيه x, y ثابت. يمكن إستكمال الجمع لأنثال الأعمدة السابقة لعمل مقطع مستوى فى حقل التكامل يولزى yz مثلاً.

يدها بأول عمود والذي فيه الإحداثى y هو دالة y_1 من x منتهايا بالعمود الأخير وفيه الإحداثى y هو أيضاً دالة $y_2(x)$ نلج الجمع فى النهاية هو تكامل بالنسبة إلى y وفيه x ثابت. أعنى

$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left(\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} F(x, y, z) dz \right) dy,$$

الخطوة الأخيرة فى الجمع تتكون من تجميع أمثال هذه الد. اطع المستوية حتى يغطى حقل التكامل. إذا كانت x_1, x_2 هى القيم المتطرفة للإحداثى x على السطح فإن المحصلة النهائية تساوى

$$\iiint_R f dV = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z) dz \right] dy \right\} dx \quad (10)$$

أى الرموز الآتية يمكن إستعمالها

$$\iiint_R f(x,y,z) dV = \int \int \int_R f(x,y,z) dx dy dz =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z) dz$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z) dz dy dx \quad (11)$$

مثال 1:

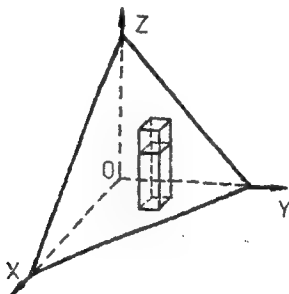
لإيجاد $\iiint_R 72xyz dV$ حيث R هي المنطقة

المحددة بالمستويات $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$

نرى أن المنطقة محددة من أعلى ومن أسفل بالمستويات

$z=1-x-y, z=0$ ومسقطها على مستوى xy هو منطقة D عبارة عن

مثلث محدد بالمستقيمات $x=0, y=0, y=1-x$



من ثم فإن التكامل الحجمى يعطى من

$$\begin{aligned}\iiint f(x, y, z) dV &= \iint_D \left[\int_0^{1-x-y} 72xyz dz \right] dA \\ &= \iint_D 72xy [z^2/2]_0^{1-x-y} dA \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} 36xy (1-x-y)^2 dy \right] dx \\ &= \int_0^1 3x (1-x)^4 dx = 0.1\end{aligned}$$

يجب أن نلاحظ أن المرحلة الأولى فى التكامل الحجمى ونعنى بها التكامل بالنسبة إلى z تختزل هذا التكامل المتكرر إلى تكامل ثنائى على المساحة الناتجة من الإسقاط العمودى على مستوى xy .

مثال ٥:

إذا كانت $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ ثوابت فإن التكامل الثلاثى المنفصل الآتى يمكن أن يكتب

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_1}^{z_2} f(x) g(y) h(z) dz &= \\ &= \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \int_{y_1}^{y_2} g(y) dy \int_{z_1}^{z_2} h(z) dz\end{aligned}$$

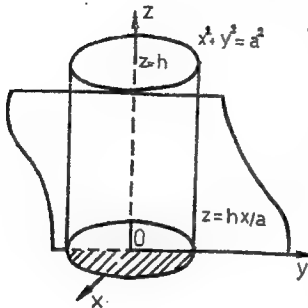
أى يمكن أن يكتب بهيئة حاصل ضرب ثلاث تكاملات على سبيل المثال

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \int_0^\infty xyz e^{-(x+y+z)} dz = \left[\int_0^\infty x e^{-x} dx \right]^3 = 1$$

مثال ٦:

لإيجاد حجم المنطقة الأصغر المحصورة بين المستوى $z = hx/a$

والمنطقة المحددة بالمعادلات $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$, $z = h$



نرى أولاً أن المستوى

$z = hx/a$ يحتوى محور Y ويقسم

السطح الإسطواني المعطى إلى

قسمين أحدهما صغير وهو المعنى

بالحساب (فيه $x > 0$) وهو متماثل

بالنسبة للمستوى xy .

الحجم المطلوب V يساوى

$$V = 2 \int \int_R \int dz dx dy$$

حيث مسقط شريحة الحجم $dv = dx dy dz$ على المستوى yz أى

$dy dz$ يقع فى الربع الأول من المستوى $z = 0$.

$$V = 2 \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_0^{hx/a} dz = 2 \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} hx/a dy$$

$$= \frac{2h}{a} \int_0^a x [y]_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \frac{2h}{a} \left[-\frac{1}{3} (a^2-x^2)^{3/2} \right]_0^a$$

$$= \frac{2h}{3} a^2$$

مثال ٧:

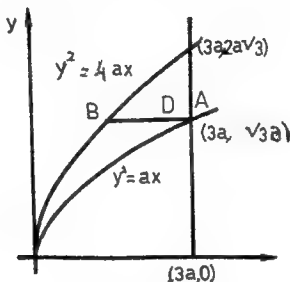
لإيجاد الحجم فى الثمن الأول الواقع داخل السطح

$x = 3a$, $z = 0$ و $y^2 = ax$ ومقطع بالأسطح $y^2 + z^2 = 4ax$

نلاحظ أن السطح $x^2 + z^2 = 4ax$ هو سطح دورانى ناتج من

دوران القطع $y^2 = 4ax$ حول محور x (معادلة السطح الدورانى الناتج من

دوران المنطى $\phi(x, y) = 0$ حول محور y هي $\phi(\sqrt{x^2 + z^2}, y) = 0$ ،
 أما المنط $y^2 = ax$ فهو سطح إسطوانى رؤاسه تولزى محور z . بهذا
 يكون مسقط الحجم المطلوب على مستوى xy محصور بين المنحنيات
 $z = 0$, $y^2 = ax$; $z = 0$, $y^2 = 4ax$; $x = 3a$, $z = 0$



$$V = \int \int_R z \, dy \, dx = \int_0^{3a} \int_{\sqrt{ax}}^{\sqrt{4ax}} \sqrt{4ax - y^2} \, dy \, dx$$

بوضع $y = \sqrt{4ax} \sin \theta$ نحصل على

$$V = \int_0^{3a} dx \int_{\pi/6}^{\pi/2} 4ax \cos^2 \theta \, d\theta = \int_0^{3a} dx \int_{\pi/6}^{\pi/2} 2ax (1 + \cos 2\theta) \, d\theta$$

$$= \int_0^{3a} 2ax \left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_{\pi/6}^{\pi/2} dx$$

$$= \int_0^{3a} 3ax \left[\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right] dx = 9a^2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$$

$$= \frac{1}{4} (12\pi - 9\sqrt{3}) a^3.$$

تمارين ١

احسب التكاملات الآتية

$$1- \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} 4xy \, dx \, dy$$

$$\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-\sqrt{y}} xy \, dx$$

$$2- \int_0^{\pi} \int_0^{\ln y} y/x \, dx \, dy$$

$$\int_{-1}^1 \int_{|y|}^1 (x+2y) \, dx \, dy$$

$$3- \int_0^{\pi} \int_0^{\sin x^2} x \, dy \, dx$$

$$4- \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^y (x+y^2) \, dx \, dy$$

$$5- \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{x^2+y^2} y \, dz \, dx \, dy$$

ارسم المناطق الآتية

$$(i) |x+y| \leq 1,$$

$$(ii) x^2 - y^2 + 2y \leq 1$$

$$(iii) x+y-1 \geq 0, \quad |x| \leq 1, \quad |y| \leq 1$$

ارسم مناطق التكامل ثم أوجد قيم التكاملات

$$6- \int_0^{\pi} \int_0^{\sin x} x^2 y \, dy \, dx$$

$$\int_0^{\pi/4} dx \int_0^{\sec x} y^3 \, dy$$

$$7- \int_0^1 \int_0^{e^y} y \, dx \, dy$$

$$\int_0^{\pi/2} \int_{-y}^y \sin x \, dx \, dy$$

$$8- \int_0^{\pi/2} d\theta \int_{\cos \theta}^1 r \cos \theta \, dr$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\infty} y x \sin y \, dx \, dy$$

احسب قيم التكاملات الآتية على المناطق D المصورة بالمنحنيات قرين

كل منها

$$9- \iint_D e^{ax+by} \, dx \, dy$$

$$D: x=0, y=0, ax+by=1 \quad (a>0, b>0)$$

$$10- \iint_D xy \, dx \, dy \quad D: y=x, y=a, x+2y=5a$$

$$11- \iint_D x^2 \, dx \, dy \quad D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$12- \int_D \int \sin\left(\frac{\pi}{a}\right) dx \, dy \quad (a, b > 0) \quad D: 0 \leq x \leq \frac{\pi a}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi b}{2}$$

$$\int_D \int x^3 y^2 \, dx \, dy \quad D: y = \pm 3(x-2), y = \pm 3(x-4)$$

$$13- \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_{a \cos \theta}^{2a \cos \theta} r^3 \sin^2 \theta \, dr$$

$$14- \iiint_D dx \, dy \, dz \quad D: az=xy, x=0, y=0, z=0, x+y=a$$

$$15- \iiint_D e^{p(x/a+y/b+z/c)} dx \, dy \, dz \quad D: x=0, y=0, z=0$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (a > 0, b > 0, c > 0)$$

$$16- \iiint_D x^2 z \, dx \, dy \, dz \quad D: z=0, z=h, x^2+y^2=a^2$$

$$17- \text{ثبت أن } \iint_D f_{xy} \, dx \, dy \text{ على المستطيل}$$

$$x_0 \leq x \leq x_1, y_0 \leq y \leq y_1$$

تعلوى

$$f(x_1, y_1) - f(x_0, y_1) - f(x_1, y_0) + f(x_0, y_0)$$

18- احسب التكاملات الآتية

$$\iint_R e^{-|x|-|y|} dx \, dy, \quad \iint_R e^{-|x+y|} dx \, dy,$$

حيث R هي المنطقة داخل المربع $x = \pm a, y = \pm a$

٥-: تبديل ترتيب التكامل

ثم نقيم التكامل الثنائي $\int_R \int f(x,y) dA$ بإيجاد نهاية المجموع:

$$\sum f(x,y) \delta x \delta y = \sum_{\delta y} \left(\sum_{\delta x} f \delta y \right) \delta x$$

عن طريق إيجاد نهايتنا الجمع بالتعاقب، أولاً بالنسبة إلى y في اتجاه شريحة مساحة رأسية ثم نهاية مجموع أمثال هذه الشرائح الرأسية لمسح حقل التكامل ونكتب

$$\int_R \int f dA = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y) dy$$

يمكن كتابة الجمع الثنائي في الهيئة $\sum_{\delta y} \left(\sum_{\delta x} f(x,y) \delta x \right) \delta y$. حيث جرى الجمع أولاً بالنسبة إلى x لإيجاد الجمع في اتجاه شريحة مساحة أفقية، يلي ذلك الجمع في اتجاه y لأن أمثال الشريحة الأفقية. في النهاية بعكس ترتيب إجراء الجمع (التكامل) للحصول على

$$\int_R \int f(x,y) dA = \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y) dx \quad (12)$$

حيث $x_1(y), x_2(y)$ هما أدنى وأقصى قيم x على امتداد شريحة مساحة أفقية ناتجة من الجمع في اتجاه x بينما y_1, y_2 هما أدنى وأقصى قيم المتغير y في حقل التكامل. عند إجراء التكامل بالنسبة إلى x يعامل المتغير y معاملة الثابت.

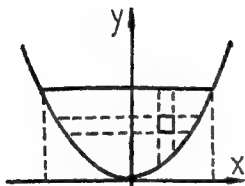
في بعض الأحوال يؤدي تبديل ترتيب التكامل إلى إختصار كبير للجهد عند تقييم التكاملات. في المسائل الخاصة التي تتطلب تبديل ترتيب التكامل فإنه، من المعتاد أن نرسم بعناية حقل التكامل كي نتعرف على نهايات التكامل. من الممكن كذلك أن نجد تبديل ترتيب تكاملات ثلاثية مع ملاحظة أن هناك ست طرق مختلفة في هذه الحالة.

مثال ٨:

لتبديل ترتيب التكامل

$$I = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 f(x, y) dy$$

نتعرف أولاً على حقل التكامل
والمعرف بالمنحنيات



$$y = x^2, y = 1$$

$$x = -1, x = 1$$

يمكن تبديل ترتيب التكامل كالآتي:

$$I = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$$

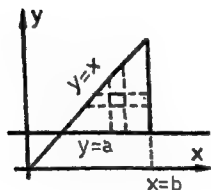
مثال ٩ :

$$\int_a^b dx \int_a^x f(x, y) dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x, y) dx$$

لإثبات أن

نحتاج للتعرف على حقل

تكامل الطرف الأيسر لتبديل ترتيب
التكامل.



حقل التكامل معرف

بالمناطق $y = a, y = x, x = a, x = b$

b بتبديل ترتيب التكامل نحصل على
المطلوب.

مثال ١٠:

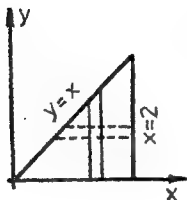
$$I = \int_0^2 dy \int_y^2 y \sqrt{1+x^2} dx$$

نلاحظ نغز إيجاد التكامل بالنسبة إلى

x أولاً. بالتعرف على حقل التكامل

($x = y, x = 2, y = 0, y = 2$) وتبديل

ترتيبه لحصل على



$$= \int_0^2 dx \int_0^x y \sqrt{1+x^3} dy = \frac{1}{2} \int_0^2 [y^2]_0^x \sqrt{1+x^3} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 x^2 \sqrt{1+x^3} dx = \frac{1}{6} \left[\frac{2}{3} (1+x^3)^{3/2} \right]_0^2 = 3$$

مثال ١١:

$$\int_0^1 dy \int_{\cos^{-1}y}^{\pi/2} \sin^2 x dx$$

لوجد

بعد تعديل ترتيب التكامل.

نتعرف أولاً على حقل

التكامل وهو نصف عقد من منطى

الدالة $y = \cos x$

ومعرف بالمعادلات

$$y = \cos x, x = \pi/2, y = 1$$

بتبديل ترتيب التكامل نحصل على

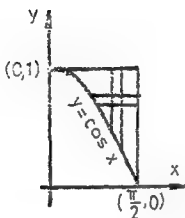
$$\int_0^1 dy \int_{\cos^{-1}y}^{\pi/2} \sin^2 x dx = \int_0^{\pi/2} dx \int_{\cos x}^1 \sin^2 x dy$$

$$= \int_0^{\pi/2} [y]_{\cos x}^1 \sin^2 x dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} (1 - \cos x) \sin^2 x dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} (\sin^2 x - \cos x \sin^2 x) dx$$

$$= \frac{7}{8} - \frac{5}{6} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2} - \left[\frac{\sin^3 x}{9} \right]_0^{\pi/2} = \frac{35}{265} \pi - \frac{1}{9}$$



مثال ١٢:

إذا كانت $f(x) \in C$ وكانت

$$f^{(0)} = f(x), f^{(-n-1)}(x) = \int_0^x f^{(-n)}(t) dt$$

فثبت أن

$$f^{(-n-1)}(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t) dt$$

لإثبات صحة العلاقة المطاوعة سوف نستخدم مبدأ الاستنتاج

الرياضي على r لإثبات أن

$$f^{(-n-1)}(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^r}{r!} f^{(-n+r)}(t) dt \quad 0 \leq r \leq n \quad *$$

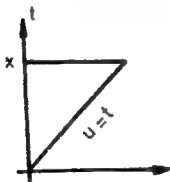
العلاقة صحيحة عند $r=0$ (من المعطيات). نفترض صحة العلاقة

عند $r=k$. أي أن

$$f^{(-n-1)}(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(-n+k)}(t) dt.$$

سوف نثبت صحة العلاقة عند $r=k+1$

$$f^{(-n-1)}(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^k}{k!} \left(\int_0^t f^{(-n+k+1)}(u) du \right) dt$$



بتبديل ترتيب التكامل

حيث تعرف منطقة التكامل

بالمعادلات $u=t, u=0, t=x$

يتحول التكامل إلى الهيئة

$$f^{(-n-1)}(x) = \int_0^x \left(\int_u^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(-n+k+1)}(u) dt \right) du$$

$$= \int_0^x \left\{ - \frac{(x-t)^{k+1}}{(k+1)!} \right\}_u^x f^{(-n+k+1)}(u) du$$

$$= \int_0^x \left\{ \frac{(x-u)^{k+1}}{(k+1)!} \right\} f^{(-n+k+1)}(u) du$$

أى أن العلاقة • صحيحة عند $k+1$ وبذا يثبت غلاب.

ليس من المضم تسوى التكاملات الثلاثية بعد تبديل ترتيب التكامل.

هذا الحال، يشبه جمع للمتسلسلات الثنائية حيث ليس بالضرورة يتسارى

الجمع على الصفوف أولاً ثم على مجموع الأعمدة مع الجمع بترتيب

معكوس. لتواجد التكامل الثنائى ومسئلته أى من التكاملين المتعاقبين شروط

هى: أن تكون الدالة $f(x, y)$ موضع التكامل معرفة ومحددة على منطقة

التكامل D وأن تكون متصلة على نقطها الداخلية.

المثال الآتى يعطى تكاملاً ثنائياً ليس له وجود (موضوع التكامل

لانتهائى عند $(0,0)$) إذ تختلف قيمتى التكامل بالتعاقب

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dx dy = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x+y-2y}{(x+y)^3} dx dy$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{-1}{x+y} + \frac{y}{(x+y)^2} \right]_0^1 dy$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{-1}{1+y} + \frac{y}{(1+y)^2} \right] dy = \int_0^1 -\frac{1}{(y+1)^2} dy = -\frac{1}{2}$$

بينما

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy dx = \frac{1}{2}$$

تمارين ٢

١ - بديل ترتيب التكامل في التكاملات الثنائية الآتية مع رسم حقل

التكامل

$$a) \int_{-2}^0 dx \int_x^{x^2} f(x, y) dy \quad b) \int_a^{a/\sqrt{2}} dy \int_{\cos^{-1}(a/y)}^{\pi/4} f(x, y) dx$$

$$c) \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\cos \theta} r f(r, \theta) dr \quad d) \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{2-x} f(x, y) dy$$

٢ - يتبدل ترتيب التكامل

$$(i) \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{xy \ln(y+a)}{(y-a)^2} dy, \quad (ii) \int_0^a \int_0^a \frac{4y^4}{\sqrt{x^2+y^2}} dy dx$$

حيث $a > 0$ بحسب قيمته

٣ - أوجد (يتبدل ترتيب التكامل)

$$(i) \int_0^{\pi} dy \int_y^{\pi-x} \frac{e^{-x}}{x} dx \quad (vi) \int_0^1 dx \int_x^1 \frac{x^2 y}{4+y^3} dy$$

$$(ii) \int_0^a dx \int_x^a \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} dy \quad (vii) \int_0^1 dy \int_{y^2}^1 y e^{x^2} dx$$

$$(iii) \int_{a/2}^a dx \int_x^a \frac{x dy}{(x^2+y^2)^{3/2}} \quad (viii) \int_0^1 dx \int_x^1 \frac{1}{y} dy$$

$$(iv) \int_0^2 dy \int_{y^2}^4 y \cos x^2 dx \quad \sin y \cos \frac{x}{y} dy$$

$$(v) \int_0^1 dx \int_0^x (1+2y-y^2)^{1/2} dy \quad (ix) \int_0^a dx \int_0^x \frac{\cos y dy}{\sqrt{(a-y)(a-x)}}$$

٤ - بعكس ترتيب التكامل إثبت أن

$$(i) \int_0^a x dx \int_0^x (a^2-y^2)^{1/2} (x^2-y^2)^{1/2} dy = \frac{8}{45} a^5$$

$$(ii) \int_0^{\infty} dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \frac{dy}{(1+y^3)^{3/2}} = \frac{1}{2}$$

$$(iii) \int_0^1 dx \int_x^1 \frac{2x dy}{2x^2 + y^2 + 1} = \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{4\sqrt{3}-9}{36} \pi$$

$$(iv) \int_0^{1/2} dy \int_y^{1/2} y^2 \sin(2\pi x^2) dx = 1/(24\pi)$$

٥ - بتبديل ترتيب التكامل ثم التعويض $y = (1-x) \sin^2 t$ أثبت أن

$$\int_0^2 dy \int_{-1}^{1-y} x^{1/2} y^{-1/2} (1-x-y)^{-1/2} dx = -3\pi/7$$

٦ - بعكس ترتيب التكامل أثبت أن

$$(i) \int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x}} \frac{dy}{(x+y)^2} = 1 - \frac{2}{5} \ln \left[\frac{1}{2} (3+\sqrt{5}) \right]$$

$$(ii) \int_0^1 dy \int_y^1 y (2x+1) (x^2+y^2)^k dx = \frac{1}{2(k+1)} \left[\frac{2^{k+2}-1}{k+2} - \frac{1}{2k+3} \right]$$

حيث k ثابت موجب.

٧ - أثبت أن

$$\int_0^x \left[\int_0^v \left(\int_0^u f(t) dt \right) du \right] dv = \frac{1}{2!} \int_0^x (x-t)^2 f(t) dt$$

٨ - وضح أن التكاملات الآتية غير قابلة لتبديل الترتيب

$$(i) \int_0^1 \int_1^{\infty} [e^{-xy} - 2e^{-3xy}] dy dx$$

$$(ii) \int_1^{\infty} \int_1^{\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$$

٦-٤: إستبدال المتغيرات (Change of variables)

✓ يتم $\int_R f(x) dx$ تكامل محدد إستبدال المتغيرات فى تكامل محدد بتعويض $x = \phi(u)$ الدالة $\phi(u)$ يجب أن تختار بحيث لا تنعدم $\phi'(u)$ أو تزيد بدون حد فى فترة التكامل وكذلك يجب أن تكون الدالة $\phi(u)$ وحيدة القيم وأن تكون على وتيرة واحدة بالضبط (strictly monotonic) على مقاطع فى ذات فترة التكامل.

كما هو الحال فى التكامل المحدد فإن إستبدال المتغيرات فى التكاملات المتعددة غالباً ما يبسط حسابها وفى هذه الحالة فإن شروطاً يجب تحققها فى دوال التعويض مثل حالة دالة المتغير الواحد. فى حالة التكامل الثلاثى نضع تعويضاً بالهيئة

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v) \quad (13)$$

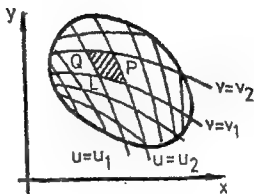
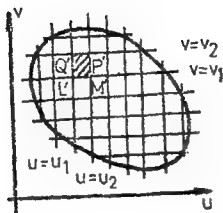
الشروط المناظرة لمشتقة دالة المتغير الواحد هى شروط على جاكوبيان التحويل وهى وجوب عدم إعدامه

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0; \quad \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \neq 0$$

لجميع نقط حقل التكامل R . كما أن الدوال $x(u, v)$, $y(u, v)$ يجب أن تكون وحيدة القيم. هذه الشروط تستوجب أن يكون للتحويل معكوساً أى أنه توجد دوال وحيدة القيم تعطى u, v كنوال من x, y :

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y) \quad (14)$$

✓ حيث أن $\iint_R f(x, y) dA$ لا يعتمد على شكل عنصر المساحة δA من ثم يمكن إستخدام علاقات المنطيات $u = \text{constant}$ and $v = \text{constant}$ لتقسيم شبكة على حقل التكامل وإستخدام عناصر مساحية من هذه الشبكة.



نعتبر نظام للإحداثيات المتعامدة uv . كل نقطة $P(x,y)$ فى مستوى xy يقابلها نقطة واحدة فقط $P'(u, v)$ فى مستوى uv تعين من المعادلات (14). وعليه فإن المنطقة R فى مستوى xy يقابلها منطقة R' فى مستوى uv . أى خط مستقيم $u = \text{const.}$ فى المنطقة R' يقابله منحنى ما فى المنطقة R . بالمثل مع أى خط مستقيم $v = \text{const.}$ أى تقسيم للمنطقة R' بخطوط $u = \text{const.}$ $v = \text{const.}$ يقابله تقسيم للمنطقة R بمنحنيات. نعتبر فى مستوى uv مساحة مستطيلة $\delta A'$ محددة بالمستقيمات

$$u = \text{const.}, u + \Delta u = \text{const.}, v = \text{const.}, v + \Delta v = \text{const.}$$

ونعتبر أيضاً المنطقة الجزئية المنحنية δA المقابلة لها فى مستوى xy . بوجه عام تختلف المساحة $\delta A' = \Delta u \Delta v$ عن نظيرتها δA . لحساب المساحة δA المناظرة للمساحة $\delta A'$ نفرض أن قيم u, v المناظرة للنقط P', Q', L', M' هى

$$P'(u, v), Q'(u + \Delta u, v), L'(u + \Delta u, v + \Delta v), M'(u, v + \Delta v)$$

الإحداثيات الكارتيزية للنقط P, Q, L, M فى مستوى xy والمناظرة
لنقط P', Q', L', M' والمصححة حتى حدود الدرجة الأولى فى $\Delta u, \Delta v$ هى

$$P(x, y), \quad Q(x + \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u, y + \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u)$$

$$L(x + \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v, y + \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v),$$

$$M(x + \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v, y + \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v).$$

المتجهات المناظرة للإزاحات ترتبط بالعلاقة $\vec{PL} = \vec{PQ} + \vec{QM}$
والذى يعطى أنه فى حدود التقريب حتى حدود الدرجة الأولى فلك $PQLM$
هو متوازي أضلاع مساحته تعطى من

$$\delta A = |\vec{PQ} \times \vec{PM}| = |(i \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u + j \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u) \times$$

$$\times (i \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v + j \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v)|$$

$$= |x_u y_v - y_u x_v| \Delta u \Delta v$$

$$= |\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}| \Delta u \Delta v$$

عدد التعويض بالمتغيرات الجديدة تتحول الدالة $f(x, y)$ إلى دالة

$g(u, v)$ ونحصل على

$$\int_R \int f(x, y) dx dy = \int_{R'} \int g(u, v) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv \quad (15)$$

للتكامل في الطرف الأيسر يجرى على المنطقة R .
 لتحويلان (13)، (14) يعرفان لكل نقطة P في مستوى xy نقطة منطوقة
 في مستوى uv والعكس. هذا التناظر يحدد للمنطقة R في مستوى
 xy صورة R' في مستوى uv . وهكذا بدلا من النظر إلى المعادلات (14)
 (13) على أنها تعويض لإجراء تكامل ننظر إليها على أنها تحويلات
 للتكامل $\iint_R F(x, y) dA$ على منطقة R من مستوى xy إلى تكامل

$$\iint_{R'} g(x, y) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

على منطقة R' من مستوى uv .

من المهم أن نلاحظ أنه عند إجراء مثل هذا التحويل فإن الحد
 $dx dy$ لا يتحول بكتابة

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv$$

ثم ضرب هذه المقادير.

كحالة خاصة نعتبر التحويل من الإحداثيات الكارتيزية إلى
 الإحداثيات القطبية

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

في هذه الحالة

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$$

$$\iint_R F(x, y) dx dy = \iint_{R'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

نوجز خطوات تبديل المتغيرات في التكامل الثنائي فيما يلي :

١. تبديل موضوع التكامل إلى المتغيرات الجديدة.

٢. تعيين عنصر التكامل الجديد والذي يترجم إلى حساب جاكوبيان التحويل.

٣. تعيين نهايات التكامل الجديدة (والتي يصحبها بعض الصعوبات) من منطقة التكامل الجديدة وهي صورة منطقة التكامل الأصلية بالتحويل الأحادي المعطى.

من خواص الجاكوبيان المشهورة والتي نعرضها لدالة المتغيرين (التعميم واراد) الخواص الآتية :

إذا كانت f, g دوال من u, v وكانت u, v دوال من x, y فإن

$$(i) \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)} \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$$

$$(ii) \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} \frac{\partial(x, y)}{\partial(f, g)} = 1$$

مثال:

$$\int_0^a \int_0^x f(x, y) dy dx = \int_0^a \int_0^x f(a-y, a-x) dy dx \quad \text{إثبت أن}$$

الحل: بوضع $u = a-y, v = a-x$ نحصل على $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = 1$ وعليه

$$\begin{aligned} I &= \int_0^a \int_0^x f(a-y, a-x) dy dx = \int_0^a \int_0^u f(v, u) dv du \\ &= \int_0^a \int_0^x f(y, x) dy dx \end{aligned}$$

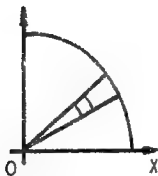
مثال ١٣:

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2} dy dx \quad \text{لإيجاد}$$

تدريج أولاً حتى يحل التكامل تمهيداً للتحويل إلى إحداثيات قطبية. حقل

التكامل محصور بالمنظيات

$$y=0, y=\sqrt{a^2-x^2}=x^2+y^2=a^2, x=0, x=a$$



وهو ربع دائرة واقعة في

الربع الأول. بالتحويل للإحداثيات

$$y = r \sin \theta, x = r \cos \theta \quad \text{القطبية}$$

تتحول ربع الدائرة في المستوى xy

إلى ربع دائرة أيضاً $r = a$ في

المستوى rθ

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2} dy dx = \int_0^{\pi/2} \int_0^a \sqrt{a^2-r^2} r dr d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \left[\frac{-2}{3} (a^2-r^2)^{3/2} \right]_0^a d\theta = \frac{1}{3} a^3 [\pi/2]$$

$$= \pi a^3/6$$

مثال ١٤:

لإيجاد الحجم المحصور بالسطح الناقص

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

نرى أن هذا الحجم يساوي ثمانية أمثال الحجم الموجود في الثمن

الموجب والمحصور بين مستويات الإحداثيات والسطح الناقص، من ثم

$$V = 8 \int_D \int_0^{c\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}} dz \, dy \, dx$$

حيث المنطقة D هي مسقط المصطح الناقصى على الربع الأول (الموجب) من مستوى xy أى المنطقة المحصورة بين المنحنيات.

$$y=0=z; x=0=z; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 = z$$

$$V = 8 \int_R \int \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \, dx \, dy$$

بوضع $x = a \cos \theta$, $y = b \sin \theta$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} a \cos \theta & b \sin \theta \\ -a \sin \theta & b \cos \theta \end{vmatrix} = abr$$

بالتحويل المعطى يتحول القطع الناقص

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

فى مستوى xy إلى دائرة $r=1$ فى مستوى التحويل $r\theta$

$$V = 8 \, abc \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \sqrt{1-r^2} \, r \, dr \, d\theta = 8 \, abc \left[-\frac{1}{3} (1-r^2)^{3/2} \right]_0^1 \left[\theta \right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{4\pi \, abc}{3}$$

مثال ١٥:

$$\text{لإيجاد } I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \text{ نعتبر } \frac{\Gamma(1/2)}{2}$$

$$I^2 = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

بالتحويل إلى الإحداثيات القطبية $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ يتحول التكامل I^2 الواقع في الربع الأول من مستوى xy إلى تكامل واقع في الربع الأول من مستوى $r\theta$

$$I^2 = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta = \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^{\infty} \left[\theta \right]_0^{\pi/2} = \pi/4$$

$$1. \text{e.} \quad I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$$

مثال ١٦:

$$\text{لإيجاد } J = \int_D e^{(x-y)/(x+y)} dx dy \text{ حيث } D \text{ هي المنطقة}$$

المحصورة بين المنحنيات $y=0, x-y=0, x+y=a$ نضع $x-y=u, x+y=v$ أى لن

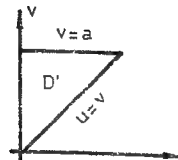
$$x = \frac{1}{2}(u+v) \quad y = \frac{1}{2}(v-u)$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

بالتحويل المعطى تتحول المنطقة D في مستوى xy إلى المنطقة D'

في مستوى uv محصورة بالمنحنيات $u=0, u=v, v=a$

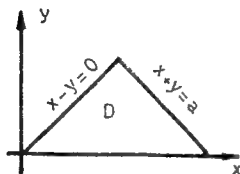
ويتحول للتكامل إلى



$$\int_D \int e^{(x-y)/(x+y)} dx dy = \int_0^a \int_0^v \frac{1}{2} e^{u/v} du dv$$

$$= \int_0^a \frac{1}{2} v [e^{u/v}]_0^v dv = \int_0^a \frac{1}{2} (e-1) v dv$$

$$= \frac{1}{4} (e-1) a^2$$



مثال ١٧:

أوجد قيمة التكامل

$$I = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{\sin \phi}{\sin \theta}} d\phi d\theta$$

الحل: باستخدام التعويض $x = \sin \phi \cos \theta$, $y = \sin \phi \sin \theta$ نحصل على

$$dx dy = \begin{vmatrix} \cos \phi \cos \theta & \cos \phi \sin \theta \\ -\sin \phi \sin \theta & \sin \phi \cos \theta \end{vmatrix} d\phi d\theta = \sin \phi \cos \phi d\phi d\theta$$

$$I = \iint \frac{1}{\sin \phi \cos \phi} \sqrt{\frac{\sin \phi}{\sin \theta}} dy dx = \iint \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx dy$$

من العلاقات $x^2 + y^2 = \sin^2 \phi$, $y/x = \tan \theta$ نرى أن

مناطق التكامل هي جزء القرص الواقع في الربع الأول ومركزه نقطة

الأصل ونصف قطره الوحدة

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx dy \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{y}} \left[\sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{1-y^2}} \right]_0^{\sqrt{1-y^2}} dy \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{2} \frac{\pi}{\sqrt{y}} dy = \pi
 \end{aligned}$$

مثال ١٨ :

استخدم التحويل $x = u(1+v)$, $y = v(1+u)$ لإيجاد قيمة التكامل

$$I = \int_0^2 \int_0^x ((x-y)^2 + 2(x+y) + 1)^{-1/2} dy dx$$

الحل: نتعرف أولاً على منطقة التكامل في مستوى xy وصورتها في مستوى uv . منطقة التكامل في مستوى xy محددة بالمنحنيات $y=x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$ وصورتها في مستوى uv بالمنحنيات

$$y=x \Rightarrow v(1+u) = u(1+v) \Rightarrow u=v$$

$$y=0 \Rightarrow v(1+u) = 0 \Rightarrow v=0 \text{ or } u=-1$$

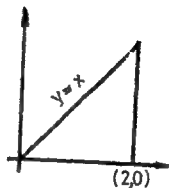
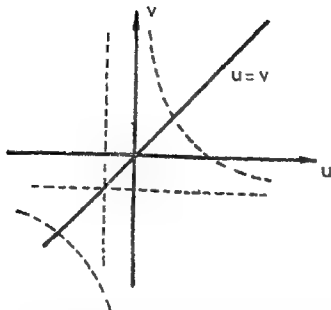
$$x=0 \Rightarrow u(1+v) = 0 \Rightarrow u=0 \text{ or } v=-1$$

$$x=2 \Rightarrow u(1+v) = 2$$

النقطة $(x, y) = (0, 0)$ تتحول إلى إحدى النقطتين $(u, v) = (0, 0)$ أو

$(-1, -1)$ والنقطة $(x, y) = (2, 0)$ تتحول إلى إحدى النقطتين $(u, v) = (2, 0)$ أو

$(-1, -3)$



دوال التحويل ليست دوال أحادية. لجعلها أحادية يجب الاكتفاء
 بإجراء التكامل على واحدة فقط من مناطق التحويل. جاكوبيان التحويل J

$$J = \begin{vmatrix} 1+v & u \\ v & 1+u \end{vmatrix} = 1+u+v$$

$$I = \int_R \int \{(u+v+1)^2\}^{-1/2} (u+v+1) \, du \, dv$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2/1+v} du \, dv = \int_0^1 \left[\frac{2}{1+v} - v \right] dv$$

$$= \left[2 \ln(1+v) - \frac{1}{2} v^2 \right]_0^1 = 2 \ln 2 - \frac{1}{2}$$

مثال ١٩:

لوجد باستخدام التحويل $x+y=u, y=uv$ قيمة التكامل

$$I = \int_0^2 \int_0^{2-x} \frac{\sec(x+y)}{(x+y)} \, dy \, dx$$

الحل: سوف نلجأ لتقسيم منطقة التكامل بمنحنيات $u = \text{constant}$

ومنحنيات أخرى $v = \text{constant}$. يحذف v من علاقته التحويل لنحصل على

$$y = \frac{v}{1-v} x \text{ وبحذف } u \text{ نحصل على } x + y = u$$

المستقيمات $x + y = u = c$

$$y/x = \frac{v}{1-v} \text{ والمستقيمات}$$

تقسم منطقة التكامل إلى شرائح

مساحات $J du dv$ حيث J هو

جاكوبيان التحويل. في هذا التحويل

تتغير u (مع ثبات v) من $u = 0$ إلى

$u = a$ والتكامل يجرى في هذه

الحالة وتقريباً في اتجاه OP وتتغير

$v/1-v$ من $\tan 0$ إلى $\tan 90^\circ$ أي

أن v تتغير من 0 إلى 1 ثم

$$I = \int_0^1 \int_0^a \frac{\sec u}{u} x du dv$$

$$J = \begin{vmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{vmatrix} = u$$

$$I = \int_0^1 \int_0^a \sec u du dv = \ln [\sec a + \tan a].$$

يمكن الحصول على نتائج معقدة للمعادلة (15) عند استبدال

المتغيرات في التكاملات الثلاثية أو الأعلى. نفرض أن دوال التحويل في

حالة التكامل الثلاثي هي:

$$x = x(u, v, \omega), y = y(u, v, \omega), z = z(u, v, \omega) \quad (16)$$

بذو التحويلات يجب أن تكون u, v, ω قيم وحيث u, v, ω قيم

التحول $\partial(x, y, z) / \partial(u, v, \omega)$ ولا يزيد بتكون حد في حقل R

هنا أيضا مستعمل تمثيل المقادير u, v, ω في نظام إحداثيات uvw

نفرض R' هي المنحطة في الفراغ uvw المناظرة لـ R في

الفراغ x, y, z . نقط للمنحطة R' في تنظر إحدى من خط R إلى

الثلاثي $\int \int \int_R f(x, y, z) dx dy dz$ إلى

$$\int \int \int_R f(x, y, z) dx dy dz = \int \int \int_{R'} g(u, v, \omega)$$

$$\left[\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, \omega)} \right] du dv d\omega \quad (1)$$

حيث $g(u, v, \omega) = f(x(u, v, \omega), y(u, v, \omega), z(u, v, \omega))$

مثال ٢٠: استخدم التحويلات

$$u = x + y + z, \quad uv = y + z, \quad uv\omega = z$$

$$\text{لحساب } I = \int \int \int_R e^{-(x+y+z)^2} dx dy dz \text{ حيث } R \text{ هي}$$

المنطقة المحاطة بالمستويات

$$x + y + z = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$$

بحل معادلات التحويل المعطاه في x, y, z نحصل على

$$x = u(1-v), \quad y = uv(1-\omega), \quad z = uv\omega$$

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, \omega)} = \begin{vmatrix} 1-v & v(1-\omega) & v\omega \\ -v & u(1-\omega) & u\omega \\ 0 & -uv & uv \end{vmatrix} = u^2 v$$

تتحول منطقة التكامل في مستوى xyz إلى المنطقة المحصورة بالأسطح

$$u=1 \quad , \quad v=1 \quad , \quad \omega=1 \quad , \quad \omega=0$$

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 u^2 v \omega^{-u^2} d\omega dv du = \int_0^1 u^2 e^{-u^2} du \int_0^1 v dv \int_0^1 d\omega$$

$$= [-1/3 e^{-u^2}]_0^1 [v^2/2]_0^1 \cdot 1 = (1-e^{-1})/6$$

مثال ٧١:

لإيجاد الحجم المحصور بالإسطوانات الزائدية

$$xy=a^2, xy=b^2, yz=a^2, yz=b^2, zx=a^2, zx=b^2$$

فإن تعويضا مناسباً يعطى حدوداً سهلة في مستوى uvw

أو

$$xy=u, yz=v, zx=\omega$$

$$\frac{\partial(u,v,\omega)}{\partial(x,y,z)} = 1 / \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,\omega)} = \begin{vmatrix} y & x & 0 \\ 0 & z & y \\ z & 0 & x \end{vmatrix} = 2xyz$$

$$= 2\sqrt{x^2 y^2 z^2} = 2\sqrt{uvw}$$

ومن ثم فإن الحجم المطلوب

$$V = \iiint_R dx dy dz = \iiint_R \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,\omega)} \right| du dv d\omega$$

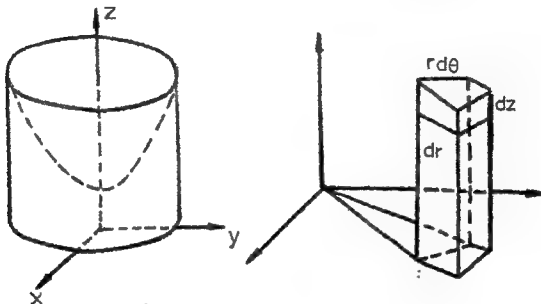
$$= \int_{a^2}^{b^2} \int_{a^2}^{b^2} \int_{a^2}^{b^2} \frac{1}{2\sqrt{uvw}} du dv d\omega = \frac{1}{2} \left(\int_{a^2}^{b^2} u^{-1/2} du \right)^3$$

$$\frac{1}{2} [[2\sqrt{u}]_a^b]^3 = 4 [b-a]^3$$

أوجد $\iiint_R (x-y+z^2) dx dy dz$ حيث R هي

المنطقة المحصورة بين الأسطح $x^2+y^2=4$, $z=0$, $z=1+x^2+y^2$

إجراء هذا التكامل سوف نلجأ لتحويل الإحداثيات الكارتيزية إلى إحداثيات إسطوانية.



نفرض

$$x=r\cos\theta, \quad y=r\sin\theta, \quad z=z$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

$$\iiint_R (x-y+z^2) dx dy dz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 dr \int_0^{1+r^2} [(\cos\theta - \sin\theta)r^2 + z^2 r] dz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 [(\cos\theta - \sin\theta)r^2 z + r z^3/3]_0^{1+r^2} dr$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 [(\cos\theta - \sin\theta) r^2 (1+r^2) + (1/3)r (1+r^2)^3] dr$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos\theta - \sin\theta) \left[\frac{r^3}{3} + \frac{r^5}{5} \right]_0^2 + \frac{1}{6} \left[\frac{(1+r^2)^4}{4} \right]_0^2 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos\theta - \sin\theta) \left(\frac{8}{3} + \frac{32}{5} + \frac{1}{24} (624) \right) d\theta$$

$$= \frac{624}{24} (2\pi) = 52\pi$$

التكامل السطحي (Surface Integral)

يسمى سطح $S: f(x,y,z)$ سطحاً ناعماً (Smooth) إذا كانت المشتقات الأولى f_x, f_y, f_z دوال متصلة عند كل نقطة من نقاط السطح تؤدي نوعاً السطح. ليس فقط إلى تواجد المستويات المماسية والمستقيمات العمودية عند كل نقطة بل وإستمرار غيرها.

لإيجاد مساحة جزء من السطح محدد بمنحنى مغلق C (أو لإيجاد مساحة السطح) سوف نفترض أن أى مستقيم يوازي محور من محاور الإحداثيات وليكن محور z لا يقطع S فى أكثر من نقطة. المسقط C للمنحنى المغلق C على مستوى xy يغلّف منطقة R . قسم المنطقة R بشبكة من المستقيمات توازي محور الإحداثيات x, y إلى n من الأقسام $\{\Delta R_i\}$ المستويات العمودية على مستوى xy والمارة بخطوط شبكة التقسيم تقسم السطح S إلى مناطق صغيرة $\{\Delta \sigma_i\}$ مساحاتها $\{\Delta \sigma_i\}$ نفرض أن ΔA_i هى مساحة ΔR_i ترتبط مساقط $\{\Delta \sigma_i\}$ على مستوى xy تقريبا بالعلاقة

$$\Delta A_i = \cos \gamma_i \Delta \sigma_i$$

حيث $\cos \alpha_i, \cos \beta_i, \cos \gamma_i$ هى جيوب تمام إتجاه العمودى على السطح S عند النقطة (x_i, y_i, z_i) على S_i (يأتى التقريب من اعتبار أن $\Delta \sigma_i$ سطحاً مستويًا) ولكن

$$\cos \alpha_i : \cos \beta_i : \cos \gamma_i = (f_x)_i : (f_y)_i : (f_z)_i$$

بالتالى

$$\cos \gamma_i = \frac{(f_z)_i}{\pm \sqrt{(f_x)_i^2 + (f_y)_i^2 + (f_z)_i^2}}$$

(تختار الإشارة المناسبة كي يشير العمودى على السطح إلى الخارج)

يمكن تقريب مساحة السطح S^- بالعلاقة

$$\sigma = \iint_R (\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2} / f_z) dA = \iint_R \sec \gamma dA$$

باعتبار المساقط R^+, R^- للقطعة S^- على مستويات الإحداثيات

الأخرى نحصل على

$$\sigma = \iint_{R'} \sec \alpha dA, \quad \sigma = \iint_{R^-} \sec \beta dA$$

يعرف التكامل السطحي للدالة المتصلة $g(x, y, z)$ والمعرفة على السطح S^- كالآتي:

نقسم السطح S^- إلى n من المناطق $\{\Delta S_i\}$ مساحتها $\{\Delta \sigma_i\}$ نكون الجمع

$$\sum_{i=1}^n g(x_i, y_i, z_i) \Delta \sigma_i$$

حيث (x_i, y_i, z_i) نقطة من السطح ΔS_i^- نهاية المجموع عند ما نؤول n إلى ما لا نهاية وبحيث نؤول أبعاد أكبر المناطق $\{\Delta S_i\}$ إلى الصفر يعرف التكامل السطحي للدالة g والذي يرمز له بالرمز

$$\iint_{S^-} g(x, y, z) d\sigma$$

يجرى عادة التكامل السابق بهيئة تكامل متتابع كالآتي:

إذا أمكن كتابة معادلة السطح بالهيئة $z=h(x, y)$ فإن

$$d\sigma = \sec \gamma dA = \sqrt{h_x^2 + h_y^2 + 1} dx dy$$

وبالتالى فإن التكامل السطحي يمكن كتابته بالهيئة

$$\iint_S g(x, y, z) d\sigma = \iint_R g(x, y, h(x, y)) \sqrt{h_x^2 + h_y^2 + 1} dx dy$$

حيث R هو المخطط -- على مستوى xy

$$I = \iint_a xyz \, ds \quad \text{مثال: اوجد}$$

حيث S هو جزء كرة الوحدة الواقع في الثمن الأول
الحل:

$$\text{كرة الوحدة هي } x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ من ثم}$$

$$h_x^2 + h_y^2 + h_z^2 = (2x)^2 + (2y)^2 + (2z)^2 = 4$$

$$I = \iint_R xyz \frac{\sqrt{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2}}{h_z} dx dy = \iint_R xyz \frac{1}{z} dx dy$$

حيث R هي جزء دائرة الوحدة الواقع في الربع الأول (أي مخطط S)

$$\text{i.e. } I = \iint_R xy \, dx dy = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} xy \, dx dy = \int_0^1 \frac{1}{2} y(1-y^2) \, dy = \frac{1}{8}$$

مثال: اوجد مساحة سطح الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ فوق مستوى xy
المحصور داخل الأسطوانة

$$x^2 + y^2 = ax$$

الحل: نسقط شريحة مساحة من السطح على مستوى xy

$$\vec{n} \cdot \vec{r} \, ds = dx dy$$

حيث \mathbf{n} وحدة متجه عمودي على سطح الكرة عند نقطة على الشريحة
 ds

$$\frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = a^2} \cdot \bar{\mathbf{k}} ds = dx dy \Rightarrow dS = \frac{a}{z} dx dy$$

المساحة المطلوبة

$$S = \iint_S dS = \iint_R \frac{a}{z} dx dy$$

حيث R هو مستط S على مستوى xy ، بالتحويل إلى إحداثيات قطبية
 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$

معادلة غلاف المستط القطبية هي

$$r = a \cos \theta$$

$$\begin{aligned} S &= \iint_R \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy = 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{a \cos \theta} \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}} r dr d\theta \\ &= -\frac{2}{2} a \int_0^{\pi/2} 2 \left[\sqrt{a^2 - r^2} \right]_0^{a \cos \theta} d\theta = -2a \int_0^{\pi/2} \left[\sqrt{a^2 - a^2 \cos^2 \theta} - a \right] d\theta \\ &= -2a^2 \left[-\cos \theta - \theta \right]_0^{\pi/2} = a^2 (\pi - 2) \end{aligned}$$

سوف نوضح كيفية إيجاد التكامل السطحي

$$\iint_S f(\vec{r}) \cdot \vec{n} \, ds$$

حيث الدالة f دالة موضع من نقط السطح s والمعروف بارامترياً بالهيئة

$$S = \vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$$

بينما \vec{n} وحدة متجه عمودى على السطح

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \vec{r}_u, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \vec{r}_v \quad \text{المتجهان}$$

يمسا السطح (يوزيان مستقيمين بمسا السطح) وعليه فإن وحدة متجه عمودى على المطح تحسب بالهيئة

$$\vec{n} = (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) / |\vec{r}_u \times \vec{r}_v|$$

أيضاً، يمثل التعبير

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv \right|$$

شريحة مساحة ds على السطح عبارة عن مساحة متوازي الأضلاع الذى فيه $\vec{r}_u du$ ، $\vec{r}_v dv$ ضلعين متجاورين ومن ثم

$$\int_S f(\vec{r}) \cdot \vec{n} ds = \iint_S f(\vec{r}) \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) \, du \, dv$$

بينما تحسب مساحة السطح من

$$\iint_S ds = \iint_S |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \, du \, dv$$

مثال:

عين مساحة جزء السطح المكافئ $x = y^2 + z^2$

والذى يمكن أن يعطى بارامترياً بالهيئة

$$x = t^2, \quad y = t \cos \theta, \quad z = t \sin \theta$$

من $x = 0$ الى $x = 12$

الحل: متجه موضع أى نقطة على السطح

$$\vec{r} = t^2 \vec{i} + t \cos \theta \vec{j} + t \sin \theta \vec{k}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = 2t \vec{i} + \vec{j} \cos \theta + \vec{k} \sin \theta$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = -\vec{j} t \sin \theta + \vec{k} t \cos \theta$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2t & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -t \sin \theta & t \cos \theta \end{vmatrix} = t \vec{i} - 2 \vec{j} t^2 \cos \theta - 2 \vec{k} t^2 \sin \theta$$

$$ds = |\vec{r}_t \times \vec{r}_\theta| dt d\theta = \sqrt{t^2 + 4t^4 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} dt d\theta$$

$$= t \sqrt{1 + 4t^2} dt d\theta$$

$$S = \iint_S t \sqrt{1 + 4t^2} dt d\theta = \int t \sqrt{1 + 4t^2} dt \left[\theta \right]_0^{2\pi}$$

$$= 2\pi \int_0^{12} \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4x} dx = \pi \left[(1 + 4x)^{3/2} \frac{2}{3} \frac{1}{4} \right]_0^{12}$$

$$= \frac{\pi}{6} [49^{3/2} - 1] = \frac{\pi}{6} (342) = 57\pi$$

تعاريف ٣

١- بإجراء التكاملات الآتية حول المنطقة R المحاطة بالدائرة $x^2 + y^2 = a^2$ أثبت أن

$$(i) \quad \int_R \int x^2 \, dx \, dy = \pi a^4 / 4$$

$$(ii) \quad \int_R \int x^2 y^2 \, dx \, dy = \pi a^6 / 24$$

$$(iii) \quad \int_R \int e^{b(x^2+y^2)} \, dx \, dy = \pi (e^{ba^2} - 1) / b$$

$$(iv) \quad \int_R \int \sin(x^2+y^2) \, dx \, dy = \pi (1 - \cos a^2)$$

$$(v) \quad \int_R \int \frac{dx \, dy}{1 + (x^2+y^2)^2} = \pi \tan^{-1} a^2$$

٢ - استخدم تعويضاً مناسباً لإثبات أن

$$(i) \quad \int_{-1}^0 \int_y^{-y} (x-y)(x+y)^4 \, dx \, dy = 32/105$$

$$(ii) \quad \int_D \int (x-y+1)^2 (2x+3y-1)^3 \, dx \, dy = 1190/3$$

$$(iii) \quad \int_0^1 \int_0^{1-x} e^{y/(x+y)} \, dy \, dx = \frac{1}{2} (e-1)$$

$$(iv) \quad \int_D \int dx \, dy = 50,$$

حيث D هي المنطقة المحصورة بالمستقيمات

$$x-y=1, x-y=3, 2x+3y=0, 2x+3y=5$$

٣ - أوجد قيمة التكامل

$$\int_D \int (x+y) \cos^2 (x-y) dx dy$$

حيث D هي المنطقة المحصورة بمتوازي الأضلاع الذى رؤوسه

$$(0, -\pi) , (\pi, 0) , (2\pi, -\pi) , (\pi, -2\pi)$$

٤ - أثبت أن

$$\int \int f_{xy} dx dy \quad 0 \leq \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leq 1$$

$$= \int_0^1 a f_x (at, b-bt) dt - f(a, 0) + f(0, 0)$$

٥ - أوجد المساحة فى الربع الأول المحصورة بالمنحنيات

$$xy^2=n, xy^2=m, y^2=ax, y^2=bx$$

٦ - أوجد $\int_D \int (x^3+y^2) dx dy$ حيث D هي المنطقة المحصورة

$$\text{بالمنحنى } (x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$$

٧ - أوجد $\int_D \int (x-2y+3) e^{2x+y+1} dx dy$ حيث D هي المنطقة

المحصورة بمتوازي الأضلاع

$$x-2y=0, x-2y=3, 2x+y=-1, 2x+y=3$$

٨ - بالتحويل إلى إحداثيات قطبية أثبت أن

$$\int_0^{e/\sqrt{2}} dy \int_y^{\sqrt{e^2-y^2}} \ln (x^2+y^2) dx = \pi/4 a^2 (\ln a - \frac{1}{2})$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^2 \ln r = 0 \quad \text{مع العلم بأن}$$

٩ - استخدم التعويض $x+y=u, x-y=v$ لإثبات أن

$$\int_0^a \int_0^a \frac{dx dy}{\sqrt{a^2+(x-y)^2}} = 2a(\ln(1+\sqrt{2}) + 1 - \sqrt{2})$$

(ب) اثبت أن

$$\int_{-1}^1 \int_{-2\sqrt{1-y^2}}^{2\sqrt{1-y^2}} (x^2+4y^2)^{3/2} dx dy = 32 \pi/5$$

١٠ - إذا كانت D هي المنطقة المحصورة بالقطع الناقص

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

فثبت

$$(i) \quad \iint_D x \, dx \, dy = (1/3) a^2 b$$

$$(ii) \quad \iint_D x^2 \, dx \, dy = \pi a^3 b / 16$$

$$(iii) \quad \iint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy = \pi ab (a^2 + b^2) / 16$$

١١ - أوجد قيمة $\iint_D (x^2 - y^2) / (x^2 + y^2) \, dx \, dy$ على المنطقة D

في الربع الأول المحصورة بمحاور الإحداثيات والقطع المكافئ

$y^2 = 4(1-x)$ بالتحويل إلى الإحداثيات القطبية.

١٢ - أوجد للمساحة المحددة بالقطع الناقص $9 = (2x+y+1)^2 + (x-y+2)^2$

$$13 - \text{ثبت أن الحجم المحصور بالسطح } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\text{يساوى } \frac{4\pi}{3} \pi abc$$

١٤ - بالتحويل إلى إحداثيات قطبية إثبت أن

$$\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sin\{(\pi/a^2)(a^2-x^2-y^2)\} dy = a^2/2$$

١٥ - باستخدام التحويل $u=y/x^3, v=x^2+y^2$ احسب التكامل

$$\iint (x^4 + 4x^2y^2 + 3y^4) x^{-6} \, dx \, dy$$

مأخوذاً على المنطقة في الربع الأول من مستوى xy والمحصورة

$$y=x^3, y=2x^3, x^2+y^2=1$$

١٦ - أوجد قيم التكاملات

$$(i) \int_0^a dx \int_{a-x}^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{dy}{(x^2+y^2)^{5/2}}$$

$$(ii) \int_0^a dy \int_y^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 x^2 + b^2 y^2}}$$

$$(iii) \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{x^2 y^2}{(x^2+y^2)^2} dy$$

١٧ - أوجد

$$\iiint_R (x-y-z)^2 (x+z)^2 (2x-3y+2z)^2 dx dy dz$$

حيث R هي المنطقة في \mathbb{R}^3 المحصورة بين المستويات

$$x-y=1, x-y=2, x+z=-1, x+z=1$$

$$2x-3y+2z=0, 2x-3y+2z=1$$

١٨ - بالتحويل إلى إحداثيات قطبية إثبت أن

$$\int_0^a x e^{-x^2} dx \int_{\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{y}{x^2+y^2} e^{-y^2} dy = \frac{1}{4a^2} (1 - (1+a^2) e^{-a^2})$$

١٩ - باستخدام التحويل $u=x+y, v=x-y$ إثبت أن

$$\int_R \int \sin(x+y) \tan(x-y) dx dy$$

يساوى $\frac{1}{4} \ln 2$ حيث R هي المنطقة المحصورة بين

$$x+y=0, x+y=\pi/2, x-y=0, x-y=\pi/4$$

٢٠ - استخدم التعويض $u=\frac{y^2}{x}, v=xy^2$ لإثبات أن المساحة في الربع

الأول المحصورة بين المنحنيات

$$a>0, c>0 \quad \text{حيث} \quad y^2=4ax, y^2=9ax, xy^2=c^3, xy^2=4c^3$$

$$(2\sqrt{2} + 4\sqrt{3} - 6\sqrt{2} - 8\sqrt{5}) c^{3/4} / 9a^{1/6} \quad \text{يساوى}$$

٢١ - إثبت أن الحجم من السطح $x^2 + y^2 = 4az$ المقطوع بـ $z = 4a$ يساوى

$$25\pi a^3/2$$

٢٢ - إثبت أن الحجم المحصور بالمتسطوات مكافئة

$$x^2 = ay, x^2 = 2ay, y^2 = az, y^2 = 2az, z^2 = ax, z^2 = 2ax$$

$$a^3/7 \quad \text{يساوى}$$

$$\int_R \int (x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2) dx dy dz \quad \text{٢٢ - يوجد}$$

حيث R هي المنطقة في الثامن الأول المحصورة بالكرة

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

٢٤ - باستخدام التعويض $x = u^2, y = v^2, z = w^2$ إثبت أن

$$\text{حجم الجسم المعين من } 0 \leq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \sqrt{a} \quad \text{حيث } a > 0$$

يساوى

$$V = 8 \int_0^b du \int_0^{b-u} dv \int_0^{b-u-v} uvw dw = a^3/90 \quad b^2 = a$$

٢٥ - ارسم المنطقة التي يجرى عليها التكامل

$$I = \int_0^{a/\sqrt{2}} dx \int_0^x \cos k(x^2 + y^2) dy + \int_{a/\sqrt{2}}^a dx \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \cos k(x^2 + y^2) dy$$

يمكن ترتيب التكامل عبر عن المجموع المثلث على هيئة تكامل

واحد. بالتحويل إلى إحداثيات قطبية إثبت أن

$$I = (\pi \sin ka^2) / 8k$$

٢٦ - ارسم المنطقة المأخوذ عليها التكامل

$$\int_0^a x e^{-x^2} dx \int_{\sqrt{a^2 - x^2}}^{\sqrt{a^2 - x^2}} \frac{y}{x^2 + y^2} e^{-y^2} dy$$

بالتحويل إلى إحداثيات قطبية يُثبت أن التكامل يساوى

$$[1 - (1+a)^2 e^{-a^2}] / 4a^2$$

٢٧ - باستخدام التحويل $x = u^2 - v^2, y = 2uv$ يُثبت أن

$$\int_R \int \frac{y \, dx \, dy}{\sqrt{(1+x)^3 (x^2+y^2)}} = 8 + 4\sqrt{7} - 4\sqrt{19}$$

حيث جرى التكامل على المنطقة فى الربع الأول المحصورة بين

القطاعات المكافئة المتحدة بالنورة

$$y^2 = 4x + 4, y^2 = x + 1/4, y^2 = 64 - 16x, y^2 = 4 - 4x$$

٢٨ - إذا كانت R هى المنطقة التى فيها x, y, z جميعها موجب بحيث

$$0 \leq x + y + z \leq 1$$

$$I = \iiint_R (x+y+z)^n xyz \, dx \, dy \, dz = \frac{1}{5!(n+6)}$$

وذلك باستخدام التحويل

$$x+y+z=u, y+z=uv, z=uvw$$

٢٩ - أوجد الحجم المحصور بين الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ والإسطوانة

$$x^2 + y^2 = ax$$

٣٠ - يُثبت أن الحجم المحصور بين السطح الناقصى

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

والإسطوانة

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 4 \sin^2 \alpha$$

يساوى

$$\frac{4}{3} \pi abc (1 - \cos^3 \alpha)$$

٣١ - استخدم التعويض $u = x + y, v = y$ لإثبات أن

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x+y)} \sin\left(\frac{\pi y}{x+y}\right) dx dy = \frac{2}{\pi}$$

٣٢ - أوجد

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{dx dy}{(1+x^2+y^2)^2}$$

حيث R هي المنطقة المحصورة ببلية واحدة من منحنى المنسكيت

$$r^2 = \cos 2\theta$$

٣٣ - إثبت أن

$$\iiint \left(\frac{1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^{1/2}}{1 + \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^{1/2}} \right)^{1/2} dx dy dz = \frac{\pi abc}{3} (3\pi - 8)$$

٣٤ - إثبت أن حجم الجسم الناتج من دوران المساحة المحددة بالمنحنيات

$$y^2 = a^3 x, y^2 = b^3 x, x^2 = c^3 y, x^2 = d^3 y$$

$$\text{حول محور } y \text{ يساوى } \frac{3\pi}{10} (a^4 - b^4) (c^5 - d^5)$$

$$\int_0^{\infty} \int_x^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy dx \quad \text{عكس ترتيب التكامل}$$

٣٦ - استخدم التعويض

$$\frac{x}{u} = \frac{y}{v} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + a^2}}{a}$$

لإثبات أن

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\sqrt{2ax}} \frac{a^2 dy dx}{(x^2 + y^2 + a^2)^2} = \pi/4\sqrt{2}$$

٣٧ - عكس ترتيب التكامل

$$\int_0^{a/2} \int_{x^2/a}^{\pi x^2/a} f(x, y) dy dx$$

٣٨ - بالتحويل إلى إحداثيات قطبية أوجد قيمة التكامل

$$\int_0^{\pi \tan \alpha} \int_0^x \frac{dy dx}{(x^2 + y^2 + a^2)^2}$$

٣٩ - أثبت أن

$$(i) \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{m/2}}{(x^2 + y^2 + z^2 + a^2)^{(m+3)/2}} dx dy dz = \frac{\pi}{2a^2 (m+3)}$$

$$(ii) \int_D \int f(x, y) dx dy = \ln 2 \int_1^2 f(u) du$$

حيث D هي المنطقة في الربع الأول التي يحدها المنحنيات

$$xy=1, xy=2, y=x, y=4x$$

$$٤٠ - \text{أوجد مساحة السطح الناتج من دوران } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad a > b$$

حول محورة الأصغر أوجد أيضاً مساحة السطح إذا كان الدوران حول المحور الأكبر.

$$٤١ - \text{أوجد } \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} xye^{-x^2-y^2} dx dy, \quad \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x+y)^2} dx dy$$

٤٢ - إثبت أن مساحة سطح معادلته الضمنية $f(x, y, z) = 0$ تعطى من

$$\iint_{R_{xy}} \frac{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}}{|f_z|} dx dy$$

حيث R_{xy} هي مسقط السطح على مستوى xy

٧-٤ تطبيقات التكامل الثنائي

للتكاملات المتعددة تطبيقات كثيرة كما أنها أداة جيدة في صياغة

بعض المفاهيم الطبيعية. وحسابها كالمساحات والحجوم والكتل .

٧-٤-١ الكتلة:

نفرض أن جسما ما يشغل منطقة G من R^3 . نفرض أيضا أن

الجسم غير متجانس وأن كثافته عند أي نقطة (x, y, z) هو دالة متصلة

$\rho(x, y, z)$. على هذا فإن الوزن التقريبي لصندوق صغير أبعاده $\Delta x, \Delta y, \Delta z$

يسوى $\rho(x, y, z) \Delta x \Delta y \Delta z$ حيث (x, y, z) نقطة من نقط الصندوق. عند

جمع أمثال هذه الأوزان وأخذ النهاية عندما تقرب كل من $\Delta x, \Delta y, \Delta z$

من الصفر نحصل على وزن الجسم

$$m = \iiint_G \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

يكون عنصر الحجم في الإحداثيات الأسطوانية مساويا

وفي الإحداثيات الكرية مساويا $r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi$

مثال ٢٣:

لكثافة عند أي نقطة من نقط كرة مصمتة نصف قطرها a تساوى

kr حيث r هو بعد النقطة عن مركز الكرة. لإيجاد كتلة الكرة نعتبر أن

مركز الكرة هو قطب إحداثيات كرية. من ثم فإن كتلة شريحة حجم تساوى

$$dm = kr (r^2 \sin \theta) \, dr \, d\theta \, d\phi$$

$$m = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^a kr^3 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

$$= [2\pi] [-\cos \theta]_0^\pi \left[\frac{kr^4}{4} \right]_0^a = k\pi a^4$$

مثال ٢٤:

صفيحة رقيقة متباعدة تقبل حيزاً محصوراً بالكاردويد

كثافتها الموحدة $r = a(1 + \sin \theta)$ عند أي نقطة تتناسب مع بعد

النقطة عن محور y أي أن

$$P(x, y) = k|x| = k|r \cos \theta|$$

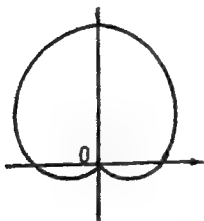
حيث k هو ثابت التناسب. من ثم

فإن عنصر كتلة يساوي

$$dm = k|r \cos \theta| r d\theta dr$$

من تماثل منحنى الكاردويد حول

محور y يمكن أن نكتب



$$M = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{a(1+\sin \theta)} k(x \cos \theta) r dr d\theta$$

$$= \frac{2k}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^3 (1 + \sin \theta)^3 \cos \theta d\theta = \frac{8}{3} k a^3$$

مثال ٢٥:

أوجد الحجم المحصور بالإسطوانات الزائدية

$$xy = 1, xy = 2, yz = 1, yz = 2, zx = 1, zx = 2$$

الحل: التحويل الواضح الذي يؤدي إلى صيغ بسيطة للحدود في

مستوى uvw

$$xy = u, yz = v, zx = w$$

يعطى من

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = 2xy \Rightarrow \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \frac{1}{2} (uvw)^{-1/2}$$

الحجم المطلوب

$$V = \iiint dx dy dz = \int_1^2 \int_1^2 \int_1^2 \frac{1}{2} (uvw)^{-1/2} du dv dw = 4(\sqrt{2} - 1)^3$$

٢-٧-٤ العزم الأول (First moment)

العزم الأول (أو ببساطة العزم) لنقطة مادية حول محور هو حاصل ضرب الكتلة في المسافة مصحوبة بإشارة (signed distance) بين النقطة والمحور. (أي مستقيم في مستوى إحداثيات يقسم المستوى جهتين تكون إشارة النقط في جهة منها عند التعويض بها في معادلة المستقيم مخالفة لإشارة النقط في الجهة الأخرى). إذا كثت النقطة المادية في الفراغ فإننا نعتبر العزم الأول حول مستوى وهو حاصل ضرب الكتلة في بعد النقطة (مصحوبا بإشارة) عن المستوى. إذا اعتبرنا جسما غير مركز عند نقطة فإننا نحسب للعزم الأول بجمع حواصل ضرب كتل قطع صغيرة في أبعاد النقط (مصحوبا بإشارة) عن المحور (المستوى) ولأخذ النهاية عندما تصغر القطع الصغيرة بدون حد. يقود هذا التعريف بالطبع إلى تكامل. سنرمز للعزم حول محوري x, y بالرموز M_x, M_y على الترتيب بينما سنرمز للعزوم حول المستويات xy, xz, yz بالرموز M_{xy}, M_{xz}, M_{yz} على الترتيب.

مثال ٧٦:

سوف نوجد عزم صفيحة رقيقة بحددها منحنى الكاردويد $r = a(1 + \sin \theta)$ حول محور x مع العمل بأن كثافة الصفيحة عند أي نقطة تتناسب مع بعد النقطة عن محور y كما في المثال السابق سوف نستغل التماثل حول محور y

$$dm = k|x| dA = k|x \cos \theta| x d\theta dr$$

$$= kr^2 \cos \theta d\theta dr$$

$$M_x = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{a(1+\sin \theta)} r \sin \theta (kr^2 \cos \theta) dr d\theta$$

$$= 2k \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{a(1+\sin\theta)} \sin\theta \cos\theta d\theta$$

$$\frac{ka^4}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+\sin\theta)^4 \sin\theta \cos\theta d\theta$$

$$= \frac{ka^4}{10} \left[\sin\theta (1+\sin\theta)^5 - \frac{(1+\sin\theta)^6}{6} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= \frac{ka^4}{10} 2^5 \left(\frac{2}{3} \right) = \frac{32}{15} ka^4$$

٢-٧-٤: العزم الثنائي (Second moment)

العزم الثنائي (أو عزم القصور الذاتي moment of inertia) لنقطة

مادية حول محور \parallel (حول نقطة 0) هو حاصل ضرب الكتلة في مربع

بعدها عن المحور (النقطة)، ويرمز له بالرمز I_0 . عزم القصور الذاتي

لعدد منتهى $(m_i)_{i=1}^n$ من النقط المادية يحسب عن طريق الجمع $\sum_{i=1}^n m_i r_i^2$.

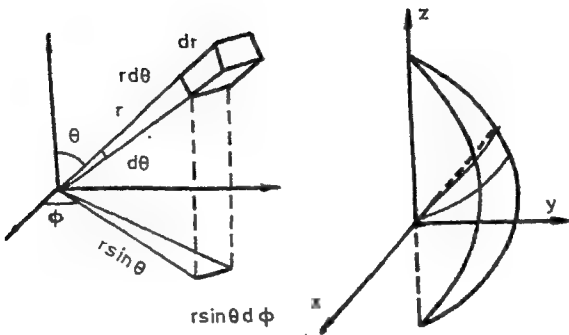
يستخدم التكامل الثنائي لحساب عزم القصور الذاتي لأجسام متصلة لتوزيع

المادى.

مثال ٢٧:

لحساب عزم القصور الذاتي I لكرة متجانسة كثافتها k ومركزها

نقطة الأصل ونصف قطرها a حول أحد أقطارها



سوف نعتبر محور z هو قطر الكرة الذي يمر عبر مركزه عزم
القصور الذاتي. بعد نقطة (r, θ, ϕ) في الإحداثيات الكرية عن محور z
تساوي $r \sin \theta$ بالتالي

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^a (r \sin \theta)^2 k r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

$$= k \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^a \left[2 \left(\frac{2}{3} \right) \right] \left[\phi \right]_0^{2\pi} = \frac{8 k \pi}{15} a^5$$

يعرف نصف قطر الدوران الأولي R (radius of gyration) لجسم
حول محور بأنه $R = \sqrt{I/m}$ حيث I هو عزم القصور الذاتي للجسم الذي
كتلته m حول المحور.
مثال ٢٨:

إيجاد نصف قطر الدوران الأولي R_{oz} حول محور z لجسم كثافته
منتظمة k يشغل داخل السطح الناقصي

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

نوجد أولاً عزم قصوره الذاتي حول محور z

$$I_{oz} = \iiint_D (x^2 + y^2) k \, dx \, dy \, dz$$

حيث منطقة التكامل D هي الحيز داخل السطح الناقصى. بأخذ

التماثل بعين الاعتبار يمكن كتابة I_{oz} كالآتى:

$$I_{oz} = 8 \iiint_G (x^2 + y^2) k \, dx \, dy \, dz$$

حيث يجرى التكامل على الثمن الموجب.

يوضع

$$x = ar \sin \theta \cos \phi, \quad y = br \sin \theta \sin \phi, \quad z = cr \cos \theta$$

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = \begin{vmatrix} a \sin \theta \cos \phi & ar \cos \theta \cos \phi & -ar \sin \theta \sin \phi \\ b \sin \theta \sin \phi & br \cos \theta \sin \phi & br \sin \theta \cos \phi \\ c \cos \theta & -cr \sin \theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= abc r^2 \sin \theta$$

$$I_{oz} = 8 abc k \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^4 \sin^3 \theta (a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi) \, dr \, d\theta \, d\phi$$

$$= \frac{8 abc k}{5} \left[\frac{2}{3} \right] \left[a^2 \frac{\pi}{4} + b^2 \frac{\pi}{4} \right] = \frac{4\pi abc k}{15} (a^2 + b^2)$$

لإيجاد كتلة الجسم نأخذ بعين الاعتبار تماثل الجسم (أى نجرى

التكامل على المنطقة G من السطح الناقصى الواقعة فى الثمن الأول

$$m = 8 \iiint_G k \, dx \, dy \, dz = 8k \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 abc r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

$$= 8 abc k \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^1 [-\cos \theta]_0^{\pi/2} [\phi]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{4 \pi a b c k}{3}$$

$$R_{oe} = \sqrt{I_{oe}/m} = \sqrt{(a^2 + b^2)/5}$$

٤-٢-٤ مراكز الكتلة (Centers of mass)

مركز كتلة جسم كتلته m هي النقطة التي يمكن اعتبار كتلة الجسم مركزة عندها فيما يخص حساب العزم الأولى للجسم حول محاور الإحداثيات. إذا كان الجسم مستويًا ومركز كتلته (\bar{x}, \bar{y}) فإن

$$\bar{x} = M_y/m, \quad \bar{y} = M_x/m$$

حيث M_y, M_x هو العزم الأول للجسم حول محور x (حول

محور y).

من المهم أن نلاحظ أن موقع مركز كتلة جسم لا يعتمد على موضع الجسم في الفراغ كما أنه يجب أن نحذر من أنه لا توجد نقطة واحدة على جسم يمكن اعتبار كتلة الجسم مركزة عندها فيما يخص حساب عزم القصور الذاتي حول أي محور.

مركز كتلة جسم في الفراغ يعطى من $\bar{x} = M_{yx}/m, \bar{y} = M_{xy}/m, \bar{z} = M_{xz}/m$ حيث M_{pq} هو العزم الأول للجسم حول مستوى الإحداثيات pq . إذا كان الجسم متجانسًا ذو كثافة ثابتة مسمى مركز كتلته تمرکز الجسم

(Centroid of the body)

مثال ٢٩:

جسم محاط بالأسطوانة $x^2 + y^2 = a^2$ والمستويين $z = a, z = b$

نفرض أن كثافة الجسم عند نقطة (x, y, z) تساوي kz . لإيجاد مركز كتلة الجسم يلزم إيجاد كل من M_{yz}, M_{xz}, M_{xy} وكذلك كتلة الجسم m .

$$m = \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^b kz r dz dr d\theta =$$

$$= k \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^b \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^a [\theta]_0^{2\pi} = \frac{1}{2} k \pi a^2 b^2$$

$$M_{xx} = \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^b kzyr dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^b kz (r \sin \theta) r dz dr d\theta$$

$$= k [z^2/2]_0^b [r^3/3]_0^a [\cos \theta]_0^{2\pi} = 0$$

$$M_{yy} = \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^b kz x r dz d\theta = k \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^b z r \cos \theta r dz dr d\theta$$

$$= k [z^2/2]_0^b [r^3/3]_0^a [\sin \theta]_0^{2\pi} = 0$$

$$M_{xy} = \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^b kz z r dz dr d\theta$$

$$= k [z^3/3]_0^b [r^2/2]_0^a [\theta]_0^{2\pi} = \frac{b^3}{3} \frac{a^2}{2} k (2\pi) = \frac{\pi k a^2 b^3}{3}$$

$$\bar{x} = \bar{y} = 0 \quad \text{من ثم}$$

$$\bar{z} M_{xy}/m = \frac{2}{3} b = \frac{2}{3} b$$

تمرينات ٤

١ - جسم مستوي على هيئة مربع رؤوسه $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,0)$ وكثافته عند أي نقطة $P(x, y) = xy^2$

أ - أوجد كتلة الجسم

ب - مركز كتلة الجسم.

٢ - إثبت أن مركز ثقل مساحة في الربع الأول محددة باللمسكيت

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta \text{ يعطى من}$$

$$8\bar{x} = \pi a\sqrt{2}, \quad 12\bar{y} = 3\sqrt{2} \log(1+\sqrt{2}) - 2$$

٣ - جسم مستوي محدد بالمنحنيات $y^2 = 4x$, $y^2 = 2x^2$ والكثافة عند أي نقطة

تساوي $1+xy$ أوجد مركز كتلة الجسم.

٤ - جسم مستوي يشغل الحيز $x^2 + y^2 \leq a$ وكثافته السطحية عند أي

نقطة تتناسب مع بعد النقطة عن مركز القرص..

أ - أوجد كتلة الجسم.

ب - العزم الأول للجسم حول الخط $x = -a$.

ج - العزم الأول للجسم حول الخط $x+y=2a$.

د - عزم القصور الذاتي للجسم حول محور عمودي على

مستوى الجسم ويمر بنقطة الأصل.

٥ - أوجد مركز كتلة المنطقة المستوية داخل الكارديويد $r = a(1 + \cos\theta)$

و خارج الدائرة $r = a$.

٦ - إثبت أن مركز كتلة الصفيحة المحصورة بالمنحنيات $x^2 = 4a - x$, $2y = 4a - x$

$x^2 = 4ay$ يقع على مسافة a من محور y .

٧ - أوجد عزم التصور الذاتي لصفحة منتظمة ذات كثافة سطحية k ثابتة

والتى حدودها هي $\theta=0$, $\theta=\pi$ والكاردويد $r = (1 + \cos\theta)$

حول محور يمر بالتقطب O عمودى على مستوى الصفحة.

٨ - أثبت أن العزم الأول لجسم مستوى حول المستقيم $x = -a$ يساوى

$$M_y + ma$$

٩ - أوجد مركز كتلة هرم محصور بالمستويات

$$x=0, y=0, z=0 \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

أوجد كذلك نصف أقطار الدوران اللولبي حول محاور الإحداثيات.

١٠ - أوجد المراكز المتوسطة

(أ) للمساحة المحاطة بالميكلويد

$$x = a(1 - \cos\theta), y = a(\theta - \sin\theta)$$

(ب) مركز قوس الميكلويد السابق.

٤- التكاملات الخطية (Line Integrals)

يقال عن منحنى C ممثلاً بالمعادلة $y=f(x)$ $a \leq x \leq b$

(أو بالمعادلتين البارامتريتين $x=x(t)$, $y=y(t)$) أنه متصل إذا كانت

الدالة $y=f(x)$ (أو الدالتين البارامتريتين) متصلة (متصلتين). يسمى

المنحنى ناعماً إذا كانت المشتقة $F'(x)$ ($\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$) دوال متصلة

دالة متصلة. إذا كان للمنحنى نقطتا بداية ونهاية متميزتين سمي المنحنى

بسيطاً (simple arc). إذا تطبقت نقطة البداية ونقطة النهاية سمي المنحنى

مغلقاً. المنحنى المغلق البسيط الذى لا يعبر نفسه يسمى منحنى جورديان

(Jordan curve). يسمى منحنى ما مقوماً (rectifiable) إذا كان طوله منتهياً.

يمكن تعميم مفهوم أن

التكامل نهاية مجموع لتعريف

التكامل الخطى $\int_C F(x, y) ds$

للدالة $F(x, y)$ على منحنى مقوم

C قسم المنحنى C إلى أقسام (ΔS_i)

بالنقط $P_0=A, P_1, \dots, P_n=B$

نفرض أن المسقط الرأسى

للقوس $P_1 P_2$ هو Δy_i

وأن مسقطه الأفقى Δx_i . من

كل قوس من أقواس التقسيم

ΔS_i نختار نقطة (x_i, y_i) يمكن

تكوين نوعين من المجموع

$$I = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta x_i$$

$$J = \sum_{j=1}^n f(x_j, y_j) \Delta y_j$$

نهية المجموعتين السابقين حال وجودهما يعرفان نوعين من

التكاملات الخطية

$$\int_C F(x, y) dx = \lim \sum F(x_i, y_i) \Delta x_i$$

$$\int_C F(x, y) dy = \lim \sum F(x_i, y_i) \Delta y_i$$

حيث تؤخذ النهاية عندما يزيد عدد التقسيمات بدون حد أى عندما

يؤول $\max \Delta S_i$ إلى الصفر.

يعرف بطريقة مماثلة التكامل الخطى على منحنى فراشى

$$\int_C P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x_i \rightarrow 0 \\ \Delta y_i \rightarrow 0 \\ \Delta z_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n P(x_i, y_i, z_i) \Delta x_i + Q(x_i, y_i, z_i) \Delta y_i + R(x_i, y_i, z_i) \Delta z_i$$

للتكاملات الخطية الخواص الآتية:

١ - يتحدد أى تكامل خطى بموضوع التكامل وعنصر التكامل.

ومنحنى التكامل وكذلك اتجاه التكامل.

تتغير إشارة التكامل الخطى بتغير اتجاه التكامل.

٢ - إذا جزأت نقطة T على مسار للتكامل C هذا المسار إلى

جزئين C_1, C_2 فإن

$$\int_C P dx + Q dy = \int_{C_1} P dx + Q dy + \int_{C_2} P dx + Q dy$$

٣ - يعتبر إتقافا اتجاه التكامل حول منحنى مغلق موجبا إذا كانت

للمنطقة التى يحدها المنحنى المغلق على يسار السائر أو فى

تجاه ضد عقارب الساعة إذا كان المنطى يحد منطقة بسيطة
الارتباط.

مثال:

إيجاد $L = \int_C (x+y^2) dx + xy dy$ من النقطة $A(1,1)$ إلى

النقطة $B(2,2)$

أ - على المستقيم القواصل بينهما

ب - على الخط المنكسر AC , CB حيث C هي النقطة $(2,1)$

أ - معادلة المستقيم AB هي $y=x$

$$L = \int_1^2 (x+x^2) dx + y^2 dy = 37/6$$

ب - معادلة المستقيم AC هي $y=1$ ومعادلة المستقيم CB هي $x=2$

$$L = \int_1^2 (x+1) dx + \int_1^2 2y dy = 11/2$$

مثال ٣٠:

أوجد $L = \int_C x dy - y dx$ حيث C هو أحد أفرع منطى

$$x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$$

الهيپوسيكلويد يتكون منطى الهيپوسيكلويد من أربعة أفرع أحدها تتغير فيه t من

$$t=0 \text{ إلى } t=\pi/2$$

$$L = \int_0^{\pi/2} (a \cos^3 t \cdot 3a \sin^2 t \cos t + a \sin^3 t \cdot 3a \cos^2 t \sin t) dt$$

$$= 3a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^2 t dt = 3a^2 \int_0^{\pi/2} (\cos^2 t - \cos^4 t) dt$$

$$= 3a^2 \left[\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{16} \right] = \frac{3a^2\pi}{16}$$

١-٨-٤ : للشغل (Work)

أحد التطبيقات التقليدية للتكاملات الخطية هو الشغل المبذول بحقل قوى على جسيم يتحرك على مسار ما في هذا الحقل. نفرض أن حقل القوة F معرف كدالة من الموضع T كالآتي:

$$F = p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + r\mathbf{k}$$

إذا تحرك الجسيم من نقطة متجه موضعها r إلى نقطة متجه موضعها $x + \delta x$ فإن الشغل المبذول δW في هذه الحالة يساوي

$$\delta W = F \cdot \delta x$$

وعلى هذا فإن الشغل المبذول بحقل القوى F لكى يتحرك الجسيم من موضع A إلى موضع B على الملتقى C يساوي

$$W = \int_A^B F \cdot dx = \int_A^B p dx + Q dy + R dz$$

حيث يجري التكامل على الملتقى C .

مثال ٣١:

لوجد الشغل المبذول بحقل قوى $F = kx^{3/2} \mathbf{e}$ حيث $x = \sqrt{x^2 + y^2}$. بينما \mathbf{e} هو متجه وحدة في اتجاه متجه الموضع إذا تحرك الجسم المادى:



أ - على دائرة مركزها نقطة الأصل.

ب - على خط مستقيم من النقطة (1,2) إلى النقطة (3,4).

أ - الشغل المبذول على الدائرة C

$$W = \int_C F \cdot dx = \int_C kx^{3/2} \mathbf{e} \cdot dx = 0$$

وذلك لأن المتجهين \mathbf{e} , dx متعامدان.

ب - متجه الموضع لأى نقطة على المستقيم

$$r = i + 2j + t(2i + 2j)$$

$$dr = (2i + 2j) dt \quad 0 \leq t \leq 1$$

المعادلات البارامترية للمستقيم الواصل بين النقطتين (3,4) , (1,2)

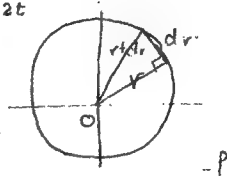
هى

$$x = (1-t) + 3t = 1 + 2t, \quad y = 2(1-t) + 4t = 2 + 2t$$

$$W = \int_C k(x^2 + y^2)^{5/2} \frac{xi + yj}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot (i dx + j dy)$$

$$= \int_0^1 k [(1+2t)^2 + (2+2t)^2]^{5/2} (4t+3) dt$$

$$2k \int_0^1 (32t^3 + 72t^2 + 56t + 15) dt = 150k$$



مثال ٢٢:

على أى منحنى من عائلة المنحنيات $y = x^n$ يصل التكامل

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} (25xy - 8y^2) dx$$

نوجد أولاً قيمة التكامل على منحنى ما من العائلة المعطاه

$$I(n) = \int_{(0,0)}^{(1,1)} (25x^{n+1} - 8x^{2n}) dx = 25/(n+2) - 8/(2n+1)$$

$$I'(n) = -\frac{25}{(n+2)^2} + \frac{16}{(2n+1)^2}$$

النهيات العظمى والصغرى تتواجد حيث

$$0 = I'(n) \Rightarrow 16(n+2)^2 - 25(2n+1)^2 = 0 \Rightarrow n = -1/2, n = -13/14$$

بحساب $I''(n)$ عند $n = -13/14$, $n = 1/2$, نجد أن $I''(1/2)$

سالبة بينما $I''(-13/14)$ موجبة وبذا فإن أكبر قيمة للتكامل

تحدث على المنحنى $y = \sqrt{x}$

٩-٤ تكاملات خطية لا تتوقف على المسار

Line Integrals Independent of the path

التكاملات الخطية وكذلك التكاملات المتعددة إن حظيت بتميز

خاص في الدوال موضوع التكامل بالإضافة إلى مناطق التكامل قادت إلى

نتائج مدهشة. نفرض أن الدالة $u(x, y)$ قابلة للتفاضل (ومن ثم وحدة

القيم) في منطقة بسيطة أو متعددة الارتباط D . للتكامل

$$I = \int_A^B \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) = \int_A^B du = u_B - u_A$$

ثم حصله دون الاعتماد على أي مسار C من النقطة A إلى النقطة

B من نقط D . في هذه الحالة لا يتوقف التكامل على المسار. عندما يكون

المسار C مغلقاً، تنطبق النقطتان A, B ويلعب التكامل. هكذا يمكن أن ننص

على الآتي:

٩-٤-١ نظرية

الشروط اللازمة لكي لا يتوقف الخطى $\int_C P dx + Q dy$ على

مسار C في منطقة بسيطة الارتباط D أن يكون للدوال P, Q مشتقات

جزئية متصلة في المنطقة وأن يكون موضوع التكامل تفاضلة تامة لدالة u

وعندئذ ينعم التكامل حول أي مسار مغلق C ناعم في مقاطع من D .

نظم أن الشرط اللازم حتى يكون المقدار $P dx + Q dy$ تفاضلة

تامة لدالة u هو أن يكون $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. هذا الشرط يكون أيضاً كافياً إذا

كانت كل من P, Q, P_y, Q_x دوال متصلة.

وفى هذه الحالة فإن

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = P dx + Q dy \quad .$$

يمكن تعميم النتيجة السابقة على مناطق متعددة الارتباط بعمل

مقاطع معترضة (Cross cuts) لجعل المناطق بسيطة الارتباط.

مثال ٣٣:

$$I = \int_C 2y \cos x dy - y^2 \sin x dx \quad \text{لإثبات أن التكامل}$$

لا يتوقف على المسار وإيجاد قيمته من (0,0) إلى (1, π) نضع

$$P = -y^2 \sin x, \quad Q = 2y \cos x$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -2y \sin x = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

وبالتالى فإن التكامل لا يتوقف على المسار. لإيجاد الدالة u بحيث

تكون تفاضلتها التامة هو موضوع التكامل

$$u = \int 2y \cos x dy = y^2 \cos x + f(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P = -y^2 \sin x = -y^2 \sin x + f'(x) \Rightarrow f'(x) = 0$$

$$f(x) = \text{constant } a$$

$$I = \int_{(0,0)}^{(1,\pi)} du = \int_{(0,0)}^{(1,\pi)} dy^2 \cos x = [y^2 \cos x]_{(0,0)}^{(1,\pi)} = -1$$

نستطيع أحيانا الحصول على الدالة u بالملاحظة مما يعطى وبسيلة

سهلة لحساب التكامل الخطى.

مثال ٣٤:

$$I = \int_{(1,0)}^{(0,1)} (x+y) dx + (x-y) dy \quad \text{الإيجاد}$$

يمكن أن نعيد تجميع الحدود

$$I = \int x dx - y dy + x dy + y dx = \int d\frac{x^2}{2} - d\frac{y^2}{2} + dxy$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + xy \right]_{(1,0)}^{(0,1)} = -1$$

مثال ٣٥:

الإيجاد

$$\int_C \frac{(ax-by) dx + (bx+ay) dy}{x^2+y^2}$$

حيث C دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها ١، نرى أن

$$P = \frac{ax-by}{x^2+y^2}, \quad Q = \frac{bx+ay}{x^2+y^2}$$

$$Q_x - P_y = \frac{b(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

وجميعها دوال متصلة عدا عند نقطة الأصل الواقعة داخل

المنطقة التي يحدها المثلث C. لو كانت الدوال متصلة لوجب إعدام

للتكامل ولكن بوضع $x = d \cos \theta$, $y = d \sin \theta$ نحصل على

$$I = b \int_0^{2\pi} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) d\theta = 2\pi b \neq 0$$

مما يؤكد وجوب تحقق شروط النظرية

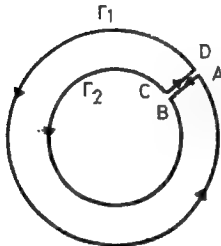
إذا كانت P, Q دوال متصلة هي ومشتقاتها الجزئية الأولى وكانت

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

في منطقة مغلقة بين دائرتين متحدتا المركز Γ_1, Γ_2 من ثم فإن

$$\int_{\Gamma_1} P dx + Q dy = \int_{\Gamma_2} P dx + Q dy$$

حقيقة:



بعمل خطوط قطع AB, CD

تتحول المنطقة الحلقية إلى

منطقة بسيطة الارتباط

وعندئذ يمكن تطبيق نظرية

١-٩-٤ عليها. من ثم من

الشروط المعطاه ينعدم

التكامل

$$\int_{\Gamma} P dx + Q dy$$

حول المنطقى γ حيث

$$\gamma = \Gamma_1 + AB - \Gamma_2 + CD$$

$$0 = \int_{\gamma} P dx + Q dy = \left(\int_{\Gamma_1} + \int_{AB} - \int_{\Gamma_2} + \int_{CD} \right) (P dx + Q dy)$$

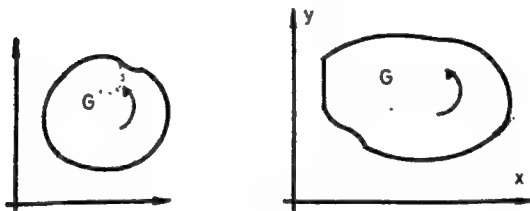
$$\text{ولكن } \int_{AB} = - \int_{CD}$$

$$\int_{\Gamma_1} P dx + Q dy = \int_{\Gamma_2} P dx + Q dy$$

١٠-٤: نظرية جرين (Green's theorem)

سوف نعرض لنظرية تربط بين التكامل الخطي على منحنى مغلق بسيط والتكامل الثنائي على المنطقة المستوية التي يحدها المنحنى المغلق ويطلق عليها نظرية جرين

من المؤلف إثبات نظرية جرين لأنواع خاصة من المناطق وبعد ذلك نعمم النظرية لمناطق أعم بتقسيمها إلى مناطق من النوع الخاص. نقول عن منطقة ما G في R^2 أنها بسيطة (Simple) إذا كان أي مستقيم يوازي أحد محاور الإحداثيات يقطع حدود المنطقة Γ في نقطتين على الأكثر (يسمح لهذا الخط أن تنطبق فترة منه على حدود المنطقة).

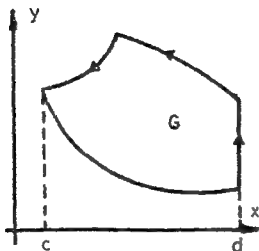


نظرية:

(نظرية جرين للمناطق البسيطة). نفرض أن G منطقة محدودة وبسيطة ومغلقة في R^2 ذات حد Γ عبارة عن منحنى مغلق ناعم في مقطع. إذا كانت $P(x, y)$, $Q(x, y)$ دوال متصلة هي ومشتقاتها الجزئية في G فإن

$$\oint_{\Gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

الإثبات:



نفرض أن حدود G

قد قسمت إلى منطقتي

أعلى (Top curve) ومنطقتي أسفل

(bottom curve) يمكن كتابتها

للمعادلة البارامترية للمنطقتي

التالي كالآتي:

$$x=x \quad y=v(x)$$

والمنطقتي السفلي كالآتي

$$x=x \quad y=u(x)$$

تكامل $P(x, y) dx$ على أي جزء من Γ مكون من خط رأسي

يساوي صفر وذلك لأن $dx=0$

$$\int_{\Gamma} P(x, y) dx = \int_c^d [P(x, u(x)) - P(x, v(x))] dx$$

$$= \int_c^d -[p(x, y)]_{u(x)}^{v(x)} dx$$

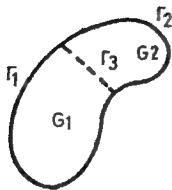
$$= \int_c^d \int_{u(x)}^{v(x)} -\frac{\partial p}{\partial y} dx dy = \int_c^d \int -\frac{\partial p}{\partial y} dx dy$$

بصورة مطابقة

$$\int_{\Gamma} Q(x, y) dy = \int_c^d \int \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy$$

بالتالي

$$\int_{\Gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_c^d \int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$



النتيجة السابقة يمكن

تقسيمها إلى مناطق يمكن

تقسيمها إلى عدد منتهى من

المناطق البسيطة. مثلا المنطقة

الموضحة بالشكل ليست بسيطة

ولكن يمكن تقسيمها إلى

منطقتين بسيطتين Γ_1, Γ_2

بالمحلي Γ_3

مما سبق يمكن أن نعيد كتابة نظرية جرين على مناطق أعم.

نظرية:

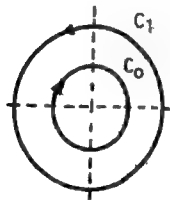
نفرض أن المنطقة G محددة ومغلقة في \mathbb{R}^2 وأن حدها Γ لاعم

في مقاطع. نفرض أيضا أن G يمكن تقسيمها إلى عدد منتهى من المناطق

البسيطة. لأي دوال P, Q متصلتين ومشتقتيها الجزئية الأولى

$$\int_{\Gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

مثال ٢٧:



نفرض أن G هي

المنطقة الحلقية بتوجه موجب

(Positively Oriented) المحصورة

بين الدائرتين

$$C_0: x^2 + y^2 = 4, C_1: x^2 + y^2 = 16$$

$$I = \int_{C_0 \cup C_1} xy dx - x dy \text{ لإيجاد}$$

نرى أولا أن التوجه الموجب على C_1 ضد عقارب الساعة وعلى C_0 مع

عقارب الساعة.

سوف ندقق نظرية جرين بتقسيم G إلى أربع مناطق بسيطة
بمحاور الإحداثيات.

يمكن كتابة المعادلات البارامترية للمنحنيات C_0, C_1 مع
مراعاة توجه هذه المنحنيات كالآتي

$$C_0: (x, y) = (2 \cos t, -2 \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$C_1: (x, y) = (4 \cos t, 4 \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\begin{aligned} \int_{C_0-C_1} (xy \, dx - x \, dy) &= \int_{C_0} (xy \, dx - x \, dy) + \int_{C_1} (xy \, dx - dy) \\ &= \int_0^{2\pi} 4 \cos t (-\sin t) (-2 \sin t) \, dt - (2 \cos t) (-2 \cos t) \, dt \\ &\quad + \int_0^{2\pi} (4 \cos t) (4 \sin t) (-4 \sin t) \, dt - (4 \cos t) (4 \cos t) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-56 \cos t \sin^2 t - 12 \cos^2 t) \, dt \\ &= \left[-56 \frac{\sin^3 t}{3} - 12 \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right) \right]_0^{2\pi} = -12\pi \end{aligned}$$

من جهة أخرى لتحويل التكامل الخطي إلى تكامل ثنائي وإستخدام
الإحداثيات القطبية نحصل على

$$\begin{aligned} I &= \iint_G (-1-x) \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} \int_2^4 (-1-r \cos \theta) r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3} \cos \theta \right]_2^4 \, d\theta = - \int_0^{2\pi} \left(6 + \frac{56}{3} \cos \theta \right) \, d\theta = -12\pi. \end{aligned}$$

لعرض الآن لمعكوس نظرية جرين.

نظرية:

إذا كانت الدالتين P, Q متصلتين ومشتقتهما الجزئية الأولى في منطقة بسيطة الإرباط D وكان $\int_C P dx + Q dy = 0$ لأي منحنى مغلق ناعم في مقاطع Γ في D فإن $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$
الإثبات:

لإثبات العكس نفرض أن $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} > 0$ عند أي نقطة $A(x_0, y_0)$ من D . من إتصال P, Q يوجد جوار وليكن قرص K مركزه A وحدوده C وفيه $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} > 0$ من صيغة جرين

$$\int_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C P dx + Q dy > 0$$

وهذا يناقض المعطيات. بالمثل إذا كانت $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} < 0$ نحصل

أيضا على تناقض. من ثم $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ في (x_0, y_0) وبثبت المطلوب.

مثال ٣٨:

لنستخدم صيغة جرين لإثبات الصيغة

$$\iint_R \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) dx dy = \oint_C \frac{\partial f}{\partial n} ds$$

حيث R منطقة محددة بمنحنى بسيط C ، بينما $\frac{\partial f}{\partial n}$ هي المشتقة الاتجاهية للدالة f في اتجاه العمودى الخارجى على C .
نعتبر

$$I = \oint_C -\frac{\partial f}{\partial y} dx + \frac{\partial f}{\partial x} dy$$

من صيغة جرين

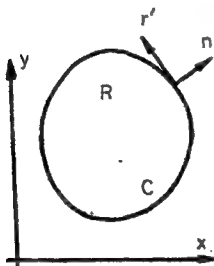
$$I = \int_R \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) dx dy = \oint_C \left(-\frac{\partial f}{\partial y} dx + \frac{\partial f}{\partial x} dy \right)$$

$$= \int_C \left(-\frac{\partial f}{\partial y} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dy}{ds} \right) ds$$

موضوع التكامل السابق يمكن كتابته على هيئة حاصل ضرب

قياسي لمتجهين

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} \quad , \quad \mathbf{n} = \frac{dy}{ds} \mathbf{i} - \frac{dx}{ds} \mathbf{j}$$



حيث \mathbf{n} هو متجه وحدة

عمودي على المنحني C إلى

الخارج وذلك لأن المتجه

$$\mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{dx}{ds} \mathbf{i} + \frac{dy}{ds} \mathbf{j}$$

هو متجه وحدة مماس للمنحني

وعمودي على \mathbf{n} حيث

$$\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n} = 0$$

بالتالي

$$\int_R \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) dx dy = \int_C \nabla f \cdot \mathbf{n} ds = \int_C \frac{\partial f}{\partial n} ds$$

تمرينات ٥

١ - أوجد $\int_C 6x^3 y dx + 10xy^2 dy$ على المنحنى $C: y=x^2$ من النقطة $(1,1)$ إلى النقطة $(2,4)$.

٢ - إصحب التكامل $\int_C y^4 dx + x^2 y dy$ حيث

$$C: x = a \cos t, y = a \sin t \quad \text{من } t=0 \text{ إلى } t=\pi/2$$

٣ - إثبت أن $\oint_C y dx - x dy = -2\pi ab$ حيث C هو القطع الناقص

$$x = a \cos t, y = b \sin t$$

٤ - إثبت أن $\oint_C x dy - y dx = -6\pi a^2$ حيث C هو منحنى السيكلويد

$$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

٥ - إصحب $\oint_C (x^2 + y) dx + (2x + y^2) dy$ حول حدود المربع الذى

$$\text{رؤوسه } (1,1), (1,2), (2,2), (2,1)$$

٦ - إصحب $\int_{(0,0)}^{(1,-1)} (x+2y) dx + xy dy$ حيث مسار التكامل:

$$\text{أولا: المنحنى } y=x^2 \quad \text{وثانيا: المنحنى } y^2=x^3$$

٧ - أوجد $\int_C (x dy + y dx)$ على المسارات الآتية

$$\text{أ - قوس الدائرة } x^2 + y^2 = a^2 \text{ الواصل بين النقطتين } (a,0), (-a,0)$$

بهذا الترتيب.

ب - الخطوط المستقيمة الواصلة بين النقط

$$(a,0), (-a,0), (-a,a), (a,a) \quad \text{بالترتيب}$$

٨ - إثبت أن $\oint_C \frac{xy(x dy - y dx)}{x^2 + y^2} = 0$ لأي منحنى مغلق C لا يمر

بنقطة الأصل.

$$\text{٩ - أوجد قيمة } \oint_C \frac{x^3 dy - y^3 dx}{(x^2 + y^2)^2}$$

أ - حيث C هو المربع الذى حدوده $x=\pm a, y=\pm a$

ب - الدائرة $x^2+y^2=a^2$

١٠ - أوجد $\int_C (y \cos x \, dx + \sin x \, dy)$ على المسار

أ - خط مستقيم يصل بين النقط $(0,0)$, $(\pi/2, \pi/2)$

ب - قوس القطع المكافئ $y=2x^2/\pi$ للواصل بين النقط

$(0,0)$, $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

١١ - أثبت أن التكامل $\int_C (x^2+y^2) \, dx + 2xy \, dy$ لا يتوقف على

المسار C وأوجد قيمته من $(0,0)$ إلى $(0,3)$.

١٢ - بإختبار مسارين من النقطة $(0,0)$ إلى النقطة $(1,1)$ أثبت أن التكاملات

الآتية تتوقف على المسار

$$\int_C (x^2y^2) \, dx + 2xy \, dy , \int_C (x^2-y^2) \, dx$$

$$\int (1+xy) e^{xy} \, dx + (x^2 e^{xy} + 2y) \, dy$$

١٣ - أثبت أن التكامل

لا يتوقف على المسار وأوجد قيمته من $(1,1)$ إلى $(2,3)$.

١٤ - على أي عائلة المنحنيات $y=kx(1-x)$ يصل التكامل

$$\int_{(0,0)}^{(1,0)} y(x-y) \, dx$$

إلى أكبر قيمة له.

١٥ - أوجد $\oint_{\Gamma} [(y^2-x^2) \, dx - 2xy \, dy] / (x^2+y^2)$ حيث Γ هي

دائرة الوحدة.

١٦ - استخدم نظرية جرين لإثبات أن $\oint_C -y \, dx + x \, dy = 6\pi$ حيث C

هو حدود المنطقة الحلقية المكونة من الدائرتين $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$

١٧ - أوجد $\oint_C (x \, dx + y \, dy) / (x^2+y^2)$ حيث

$$C=C_0+C_1 \quad C_0: x^2+y^2=a^2, C_1: x^2+y^2=b^2, b>a$$

$$u=\frac{1}{2} \ln(x^2+y^2) \quad \text{ما علاقة التكامل بالدالة}$$

١٨ - حقق صيغة جرين للتكامل $\oint_C (x^2+y) \, dx - xy^2 \, dy$ مأخوذاً

على حدود مربع رؤوسه $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$.

١٩ - حقق صيغة جرين للتكامل $\oint_C (x-y) dx + (x+y) dy$
 مأخوذاً على المساحة المحدودة في الربع الأول المحصورة
 بالمنحنيات $y=x^2$, $x^2=y$

٢٠ - أوجد $\oint_C 3x^2y^2 dx + 2x^3y dy$ في الاتجاه الموجب للمنحنى
 C حيث C هو القطع الناقص $x^2+4y^2=4$

٢١ - احسب $\oint_C x dy - y dx$ حول المنحنى C في المسألة السابقة.

٢٢ - وضح أن صيغة جرين لا تتحقق للدوال

$$u = -\frac{y}{x^2+y^2} \quad , \quad v = \frac{x}{x^2+y^2}$$

على القرص R المعروف بالمعادلة $x^2 + y^2 \leq 1$

٢٣ - استخدم صيغة جرين لإثبات أن المساحة المحصورة بمنحنى مغلق
 بسيط C تعطى بالصيغة

$$A = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx$$

٢٤ - بوضع $P = f \frac{\partial g}{\partial x}$, $Q = f \frac{\partial g}{\partial y}$ في صيغة جرين أثبت أن

$$\iint_R \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} \right) dx dy = \oint_C f dg$$

حيث R هي المنطقة المحصورة بالمنحنى البسيط C .

٢٥ - أثبت أن التكامل

$$I = \int (2x^2y^2 + 1)e^{x^2y^2} dx + [2x^3ye^{x^2y^2} + 2y] dy$$

لا تتوقف على المسار وأوجد قيمته من (0.0) إلى (1.1)

التفاضل الجزئي

Partial Differentiation

التفاضل الجزئى

٥-١ النهايات والاتصال (Limits and continuity)

سوف نعالج فى هذا الباب دوال حقيقية من عدة متغيرات أى دوال

من R^n إلى R مثل

$$u = u(x, y, z) = xyz, \quad v = v(x, y) = x^2 + 4y, \text{ etc.}$$

المتغيرات x, y, z, \dots تسمى متغيرات مستقلة وتسمى u, v, \dots

متغيرات تابعة. للتبسيط، سوف نعالج دالماً دوال وحيدة القيم من متغيرين

أى دوال من R^2 إلى R حيث لهذه الدوال تمثيل هندسى (دالة متغيرين

مستقلين تمثل سطحاً) ولكن الطرق المستخدمة وكذلك النتائج يمكن تعميمها

لدوال أكثر من متغيرين.

نبدأ بتعريف نهاية دالة متغيرين. نقول أن الدالة $f(x, y)$ تتحول إلى

نهاية A عندما تقرب x من a وتقرب y من b ونكتب

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y) = A$$

إذا وفقط إذا كان لكل عدد موجب ϵ يوجد عدد $\delta > 0$ بحيث

$$|f(x, y) - A| < \epsilon$$

لجميع قيم (x, y) بحيث

$$0 < [(x-a)^2 + (y-b)^2]^{1/2} < \delta$$

أى أن جميع قيم الدالة $f(x, y)$ لقيم (x, y) الواقعة فى جوار نصف قطره δ

ومركزه (a, b) تقع فى جوار للنقطة A نصف قطره ϵ

يمكن الاستعاضة عن الشرط $\frac{1}{2} < \delta$ بالشرط $0 < [(x-a)^2 + (y-b)^2]^{\frac{1}{2}} < \delta$ بالشرط $|x-a| < \delta, |y-b| < \delta$

مثال ١:

$$f(x, y) = (x+y) \sin(x+y) \rightarrow 0 \text{ as } (x, y) \rightarrow (0, 0)$$

$$|f(x, y) - 0| = |x+y| |\sin(x+y)|$$

$$\leq |x+y|$$

$$\leq |x| + |y| < \epsilon \text{ for } |x|, |y| < \delta = \epsilon/2$$

مثال ٢: الدالة

$$f(x, y) =$$

$$1 \quad x = -y$$

ليس لها نهاية بإقتراب (x, y) من $(0, 0)$ لأننا إذا عتبرنا x, y تقربان من نقطة الأصل على المستقيم $y = mx$ فإن

$$f(x, mx) = \frac{1-m}{1+m}$$

وهذا المقدار يمكن أن يجرى على جميع الأعداد الحقيقية. نلاحظ أيضا في هذا المثال أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} [\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)] = 1, \quad \lim_{y \rightarrow 0} [\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)] = -1$$

٥-٢ النهايات المتكررة (Repeated Limits)

أى تتواجد النهاية المزدوجة

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$$

يجب أن يكون للدالة f نفس النهاية على أى مسار إقتراب من النقطة

(a, b) . النهاية خلال مسارين من نوع خاص لهما أهمية ويقودون إلى النهايات المتكررة.

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x,y) , L_2 = \lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x,y) .$$

من الطبيعي أن نقول أنه حال تواجد النهاية المزدوجة مستواجد النهايات المتكررة وتكون النهايات الثلاث متساوية . مع هذا فإن النهايات المتكررة قد تتواجدون أن تتواجد النهاية المزدوجة.
مثال ٣: نعتبر الدالة

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4} \quad (x,y) \neq (0,0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = 0$$

لدراسة وجود النهاية المزدوجة ندرس إقتراب (x,y) من $(0,0)$

على المسار $y = mx$

$$f(x, mx) = \frac{m^2 x}{1+m^4 x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

من جهة أخرى

$$f(y^2, y) = \frac{y^4}{y^4 + y^4} = \frac{1}{2}$$

أى أن النهاية المزدوجة ليس لها وجود.

٣-٥ الاتصال (Continuity)

تكون الدالة $f(x, y)$ متصلة عند نقطة (a, b) إذا كان (a, b)

معرفا وكان

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y) = f(a, b)$$

اتصال دالة في (x, y) يستوجب اتصالها في كل متغير على حده ولكن العكس غير صحيح كما أوضحنا في مثال ٣.

٤-٥ المشتقات الجزئية (Partial derivatives)

إذا بقيت y ثابتة في الدالة $f(x, y)$ وأشتقت الدالة الناتجة بالنسبة إلى x فإلنا نحصل على مشتقة الدالة f جزئيا بالنسبة إلى x والتي تكتب $\frac{\partial f}{\partial x}$ أو $f_x(x, y)$ وهكذا نعرف

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

بفرض تواجد النهاية.

بالمثل نعرف مشتقة الدالة f جزئيا بالنسبة إلى y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

نلاحظ أن تعريف النسب الجزئية ينظر تعريف المعتدلة العادية

لدالة المتغير الواحد. بالتالي تتطابق قوانين تفاضل دالة أكثر من متغير مع قوانين تفاضل دالة المتغير الواحد.

مثال 4: في الدالة

8 x

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x y^4 + y \sin x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4x^2 y^3 - \cos x$$

مثال 5: في الدالة

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad f(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y(x^2 + y^2) - 2x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x(x^2 + y^2) - 2x y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

لإيجاد $f_x(0, 0)$ يجب أن نعود إلى التعريف.

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0$$

أيضا $f_y(0, 0) = 0$.

يجب أن نلاحظ أن

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f_x(x, y)$$

ليس لها وجود، أي أن الدالة $f_x(x, y)$ غير متصلة عند نقطة الأصل.

كذلك يجب أن نلاحظ أن الدالة f أيضا غير متصلة عند نقطة الأصل.

مثال 6: العلقان $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ في أربع متغيرات يمكننا من التعبير عن أي اثنين منها بدلالة الآخر. مثلا:

$$a) x=r \cos \theta, y=r \sin \theta$$

$$b) r^2=x^2+y^2, \theta=\tan^{-1}y/x$$

$$c) r=x \sec \theta, y=x \tan \theta$$

$$2r \frac{\partial r}{\partial x} = 2x \Rightarrow \frac{\partial r}{\partial x} = \cos \theta \text{ (b) ومن } \frac{\partial x}{\partial r} = \cos \theta \text{ (a) من}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \sec \theta \text{ (c) ومن}$$

هذه النتائج المتباينة نتجت من إختلاف المتغيرات التى نعنا
بتبنيها، أى أنه فى حالة دوال أكثر من متغير يجب الإشارة إلى المتغيرات
المستقلة كل نكتب

$$\frac{\partial r}{\partial x} |_y = \cos \theta, \quad \frac{\partial r}{\partial x} |_0 = \sec \theta$$

يمكن تعميم مفاهيم دوال متغيرين لدوال أكثر من متغيرين من
حيث النهايات والاتصال والإشتقاق.
مثال:

$$f(x, y, z) = xy^2 z^3$$

$$f_x = y^2 z^3, \quad f_y = 3xy^2 z^2$$

أى تجمع من النقط (x, y) تسمى مجموعة (set). أى مجموعة من النقط
 (x, y) بحيث $|x-a| < \delta, |y-b| < \delta$ تسمى مربعا مفتوحا بينما
مجموعات النقط (x, y) بحيث $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$ تسمى قرصا
مفتوحا مركزه (a, b) ونصف قطره δ وكلاهما جوار للنقطة (a, b) . تسمى
نقطة (a, b) نقطة حدية (boundary point) لمجموعة S إذا كان كل جوار
للنقطة (a, b) (بيان كان مربعا أو قرصا مفتوحا يقطع كل من S ومكمل S ،
فى مجموعة غير خالية. تسمى مجموعة S مغلقة إذا احتوت على نقاطها
الحدية. تسمى نقطة P نقطة داخلية (interior point) لمجموعة S إذا وجد

جوار النقطة P يقع بكامله داخل S . تسمى مجموعة S مفتوحة ($open$) إذا تكونت من نقط داخلية فقط. مثلاً المجموعة $x^2 + y^2 < a^2$ هي مجموعة مفتوحة ونقطها الحدية هي $x^2 + y^2 = a^2$ وبالتالي فإن المجموعة $x^2 + y^2 \leq a^2$ تكون مغلقة. يقال أن مجموعة ما مرتبطة بالمسار (path connected) إذا كان كل نقطتين متميزتين من نقطها يمكن إصالحهما بمسار (صورة متصلة للفترة $[0, 1]$) يقع بكامله داخل المجموعة.

أي مجموعة مفتوحة ومرتبطة المسار تسمى مجالاً (domain). المنطقة (Region) هي مجال أو مجال مضائق إليه بعض أو كل نقطه الحدية. نقول أن $f(x, y) \in C$ في مجال D إذا وقط إذا كانت $f(x, y)$ متصلة عند جميع نقط المجال D . ونقول أن $f(x, y) \in C$ عند نقطة حدية (a, b) من منطقة R حيث تعرف $f(x, y)$ إذا وقط إذا كان

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y) = f(a, b) \quad (x, y) \in R$$

أي أن النقطة (x, y) تقترب من (a, b) من خلال نقط R ، وهو تعريف يلتزم بقراب دالة المتغير الواحد من نقطة حدية من جهة واحدة. للدالة $f(x, y) \in C$ في منطقة R إذا كانت $f(x, y)$ متصلة عند كل نقطة من نقطة R .

٥-٥ نظرية القيمة المتوسطة (The mean - value theorem)

قبل عرض نظرية القيمة المتوسطة لدالة متغيرين نتذكر نظرية القيمة المتوسطة لدالة المتغير الواحد.

٥-٥-١ نظرية: إذا كانت الدالة $f(x)$ متصلة في الفترة $[a, b]$ وتواجدت

$f'(x)$ في الفترة (a, b) ، من ثم يوجد عدد ξ ، $a < \xi < b$ بحيث

$$f(b) - f(a) = (b-a) f'(\xi).$$

نعرض الآن النظرية القيمة المتوسطة لدالة متغيرين.

٥-٥-٢ نظرية: إذا كان للدالة $f(x, y)$ مشتقات جزئية متصلة في مجال D

فيها نقطتين (x, y) و $(x+h, y+k)$ من نطق D

$$f(x+h, y+k) - f(x, y) = hf_x(x+\theta_1 h, y) + kf_y(x+h, y+\theta_2 k)$$

حيث $0 < \theta_1 < 1, 0 < \theta_2 < 1$

الإثبات. نضع

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x+h, y+k) - f(x, y) = [f(x+h, y+k) - f(x+h, y)] \\ &+ [f(x+h, y) - f(x, y)] \end{aligned}$$

بتطبيق نظرية القيمة المتوسطة لدالة المتغير الواحد على كل قوس في

الطرف الأيمن نحصل على

$$\Delta f = kf_y(x+h, y+\theta_2 k) + hf_x(x+\theta_1 h, y)$$

ليس هناك من سبب يجعلنا نفترض أن $\theta_1 = \theta_2$

مثال ٧: نعتبر الدالة

$$f(x, y) = x^3 + 2y^2 - y, \quad (a, b) = (1, 2)$$

$$\Delta f = f(1+h, 2+k) - f(1, 2)$$

$$= 3h(1+h+\frac{h^2}{3}) + k[4(2+\frac{1}{2}k) - 1]$$

$$:= hf_x(a+\theta_1 h, b) + kf_y(a+h, b+\theta_2 k)$$

$$= 3h(1+\theta_1 h)^2 + k[4(2+\theta_2 k) - 1]$$

بمقارنة الأطراف المتناظرة نحصل على

$$1+h+h^2/3=1+2\theta_1 h+\theta_1^2 h^2 \rightarrow \theta_1^2 h^2+2\theta_1 h-h-h^2/3=0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \theta_1 = \frac{-2h \pm \sqrt{4h^2 + 4h^2(h+h^2/3)}}{2h^2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+h+h^2/3}}{h}$$

$$\theta_2 = 1/2$$

٦-٥ الدوال القابلة للتفاضل (Differentiable functions)

من أجل تحليل أدق نقدم فصلاً من الدوال يسمى فصل الدوال

القابلة للتفاضل. نقول أن الدالة $f(x,y)$ قابلة للتفاضل عند نقطة (x,y) إذا

كانت معرفة في جوار لهذه النقطة مع تواجد كل من $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ بحيث

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$$

$$= f_x(x, y) \Delta x + f_y(x, y) \Delta y + \phi(\Delta x, \Delta y) \Delta x + \psi(\Delta x, \Delta y) \Delta y$$

حيث

$$\phi(\Delta x, \Delta y), \psi(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0 \text{ as } (\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$$

أي أن قابلية دالة للتفاضل تعني وجود المشتقات الأولى مما يعني

تصال الدالة.

مثال ٨: الدالة $f(x,y) = 2 - y + 2x^2 - x^2 y$ قابلة للتفاضل عند أي نقطة

(x,y) لأن المشتقتين

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x - 2xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -1 - x^2$$

متواجدتين عند أي نقطة وكذلك

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y) = (4x-2xy)\Delta x + (-1-x^2)\Delta y \\ + (2\Delta x-y\Delta x)\Delta x - (2x\Delta x + (\Delta x)^2)\Delta y$$

حيث يمكن أن نضع

$$\phi(\Delta x, \Delta y) = 2\Delta x - y\Delta x \quad , \quad \psi(\Delta x, \Delta y) = -(2x\Delta x + (\Delta x)^2)$$

مثال ٩: الدالة $f(x, y) = |x|(1+y)$ متصلة عند $(0,0)$ ولكنها غير قابلة للتفاضل

$$f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0) = f(\Delta x, \Delta y) = |\Delta x|(1+\Delta y)$$

$$f(\Delta x, \Delta y) \rightarrow f(0,0) \text{ as } \Delta x, \Delta y \rightarrow 0 \Rightarrow f(x, y) \in \mathbb{C} \text{ at } (0,0)$$

$$f(\Delta x, 0) = |\Delta x| \Rightarrow f(\Delta x, 0) / \Delta x = \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

ولكن النهاية $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ غير معرفة وبالتالي فإن $f_x(0,0)$ ليس لها وجود

مثال ١٠: نعتبر الدالة

$$= x \quad |y| < |x|$$

$$f(x, y)$$

$$= -x \quad |y| \geq |x|$$

$$f_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$$

$$f_y(0,0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0}{k} = 0$$

$$f(\Delta x, \Delta x) = -\Delta x$$

$$= f_x \Delta x + \phi(\Delta x, \Delta x) \Delta x + \psi(\Delta x, \Delta x) \Delta x$$

بعد التقسمة على Δx وإتجاه Δx إلى الصفر نحصل على نتائج. أى أن
الدالة f غير قليلة للتفاضل.

٧-٥ المشتقات الجزئية من الرتب الثانية ومن الرتب الأعلى:

حيث أن المشتقات الجزئية لدالة $f(x,y)$ هي بدورها دوال من (x,y)
وعليه قد يكون لها مشتقات جزئية. المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية
تعرف كالتالى:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}(x,y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(x+h,y) - f_x(x,y)}{h}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}(x,y) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f_y(x,y+k) - f_y(x,y)}{k}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} = f_{xy}(x,y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(x+h,y) - f_y(x,y)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{h} \lim_{k \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x+h,y+k) + f(x+h,y)}{k} - \frac{f(x,y+k) - f(x,y)}{k} \right\} \right]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x+h,y+k) - f(x+h,y) - f(x,y+k) + f(x,y)}{hk}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\Delta^2 f}{hk}$$

بالمثل

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = f_{yx}(x,y) = \lim_{k \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta^2 f}{hk}$$

أى أن المشتقات الجزئية الثانية المختلطة تنتج من النهايات

المكررة للمقدار $\frac{\Delta^2 f}{hk}$ وهما تتساويان عندما تتساوى النهايات المكررة.

بنمط مماثل تعرف المشتقات الجزئية العليا. على سبيل المثال

المشتقات الجزئية من الرتبة الثالثة هي:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$$

المشتقات المختلطة مثل f_{yxx}, f_{xyx} قد تتساوى أو لا تتساوى.

نقول أن $f(x, y) \in C^n$ في منطقة R إذا وفقط كان

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \dots, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \in C \text{ in } R.$$

من الممكن إثبات أنه إذا كانت $f(x, y) \in C^n$ فإن

$f(x, y) \in C^k$ (ك=0, 1, 2, ..., n-1) مثلما هو الحال في دالة المتغير الواحد.

تساوى المشتقات المختلطة

١-٧-٥ نظرية: إذا تراجعت المشتقات f_x, f_y, f_{yx} في جوار نقطة (a,b)

وكانت f_{yx} متصلة عند (a,b) فإن f_{xy} تتواجد أيضا ويكون

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$$

الإثبات: نفرض أن $\phi(x) = f(x, y+k) - f(x, y)$

$$\Delta^2 f = \phi(x+h) - \phi(x)$$

$$= h\phi'(x+\theta_1 h) \quad 0 < \theta_1 < 1$$

$$= h f_x(x+\theta_1 h, y+k) - f_x(x+\theta_1 h, y)$$

بتطبيق نظرية القيمة المتوسطة على الدالة الأخيرة في y نحصل على

العلاقة الآتية قرب (a,b)

$$\Delta^2 f = h k f_{yx}(a + \theta_1 h, b + \theta_2 k) \quad 0 < \theta_2 < 1$$

حيث أن f_{yx} متصلة عند a, b بالتالى:

$$\Delta^2 f = h k f_{yx}(a, b) + \varepsilon$$

حيث $\varepsilon \rightarrow 0$ عندما $h, k \rightarrow 0$ من ثم

$$\begin{aligned} f_{xy}(a, b) &= \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\Delta^2 f}{hk} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} [f_{yx}(a, b) + \varepsilon] \\ &= f_{yx}(a, b) \end{aligned}$$

نظرية أخرى تتطلب نواجد وإتصال مشتقات الرتبة الأولى هي:

٧-٢-٥ نظرية: إذا تواجدت f_x, f_y فى جولر (a, b) وكانتا قابلتين للتفاضل

عند (a, b) فإن $f_{yx}(a, b) = f_{xy}(a, b)$.

إثبات للنظرية السابقة نحتاج للنظرية التمهيدية الآتية.

٧-٢-٥ نظرية تمهيدية (Lemma)

لأى دالة $f(x, y)$

$$\Delta_x \Delta_y f(x_0, y_0) = \Delta_y \Delta_x f(x_0, y_0)$$

حقيقة

$$\Delta_x \Delta_y f(x_0, y_0) = \Delta_x f(x_0, y_0 + \Delta y) - \Delta_x f(x_0, y_0)$$

$$= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) + f(x_0, y_0)$$

$$\Delta_y \Delta_x f(x_0, y_0) = \Delta_y f(x_0 + \Delta x, y_0) - \Delta_y f(x_0, y_0)$$

$$= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0)$$

إثبات النظرية الأساسية

نترض (x_0, y_0) نقطة إختيارية في المجال حيث $f \in C^2$. من ثم

$$\Delta_x \Delta_y f(x_0, y_0) = \Delta_y \Delta_x f(x_0, y_0)$$

$$\Delta_y \Delta_x f(x_0, y_0) = \Delta_y [f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)]$$

$$= \Delta_y f_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0) \Delta x \quad 0 < \theta_1 < 1$$

$$= [f_{yx}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) - f_{yx}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0)] \Delta x$$

$$= f_{yx}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y) \Delta x \Delta y$$

بالمثل

$$\Delta_x \Delta_y f(x_0, y_0) = f_{xy}(x_0 + \theta_3 \Delta x, y_0 + \theta_4 \Delta y) \Delta x \Delta y$$

من التعلوى في النظرية التمهيدية وبالقسمة على $\Delta x \Delta y$ ثم لدعهما

يقتربان من الصفر نحصل على التعلوى المطلوب.

مثال ١١: في هذا المثال نعرض لدالة f حيث $f_{yx} \neq f_{xy}$. نعتبر

$$f(x, y) = 2xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad , \quad x^2 + y^2 \neq 0$$

$$f(0, 0) = 0$$

يمكن إثبات بالقوانين الأساسية أن $f_{xy} = f_{yx}$ عندما لا تكون (x, y)

هي نقطة الأصل. هذه القواعد لا تطبق عند نقطة الأصل بمعيب إبعاد مقام

الكسر، وعلينا أن نلجأ للمبادئ الأولية.

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = 0$$

$$f_x(x,y) = 2y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + 2xy \frac{4xy^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad x^2 + y^2 \neq 0$$

$$f_y(x,y) = 2x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - 2xy \frac{4x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} \quad x^2 + y^2 \neq 0$$

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f_y(\Delta x, 0) - f_y(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f_x(0, \Delta y) - f_x(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{-2\Delta y}{\Delta y} = -2$$

من المهم أن نميز بين $f_{xy}(0,0)$ وبين $\lim_{x \rightarrow 0} f_{xy}(x,y)$ حيث أن الدالة $f_{xy}(x,y)$ ليست متصلة عند $(0,0)$.

تمارين ١

١ - أوجد

i) $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\sin xy}{\cos (x+y)}$,

ii) $\frac{\partial}{\partial y} x^2 e^{xy}$

iii) $f_x(x,y)$, $f_y(1,2)$ if $f(x,y) = \tan^2(x^2 - y^2)$

٢ - إذا كانت

$$u - v + 2w = x + 2z , \quad 2u + v - 2w = 2x - 2z ,$$

$$u - v + w = z - y$$

أوجد

$$\frac{\partial u}{\partial y} , \frac{\partial v}{\partial y} , \frac{\partial w}{\partial y}$$

٣ - إذا كانت $u = x^{yz}$ أوجد

$$\frac{\partial u}{\partial x} , \frac{\partial u}{\partial y} , \frac{\partial u}{\partial z}$$

٤ - إذا كانت $u = xy$ فثبت أن $u_{xy} = u_{yx}$

٥ - أوجد $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ إن كان لهما وجود للدوال $f(x,y)$ الآتية:

(a) $\frac{xy^2}{x^2+y^2}$, (b) $x \sin \frac{1}{x^2+y^2}$ (c) $\frac{xy}{\sqrt{x^2-y^2}}$

٦ - ثبت أن الدالة

$$f(x,y) = \frac{x^6 - 2y^3}{x^2 + y^2} \quad x^2 + y^2 \neq 0$$

$$f(0,0) = 0$$

قابلة للتفاضل عند $(0,0)$.

٧ - أثبت أن $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ غير قابلة للتفاضل عند $(0,0)$

٨ - أوجد θ_1, θ_2 في نظرية القيمة المتوسطة للدالة

$$f(x,y) = x^2 + 3xy + y^2 \quad a, b = 0, \Delta x = 1 \quad \Delta y = -1$$

٩ - إذا كانت

$$f(x,y) = x^2 \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) - y^2 \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) \quad xy \neq 0,$$

$$f(x,0) = f(0,y) = f(0,0) = 0$$

أثبت أن $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$

١٠ - دع (xy) تقرب من $(0,0)$ على المستقيم $y = -x$ أوجد

$$\lim \frac{\sin xy + xe^{x-y}}{x \cos y + \sin^2 y}$$

$$\lim \frac{e^{xy} - 1}{\sin x \ln(1+y)}$$

$$\lim \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

١١ - أوجد

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x-y}{x+y}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-y}{x+y}$$

١٢ - أوجد النهايات بالتتابع عندما $(x,y) \rightarrow (0,0)$ للدوال الآتية

$$(i) \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

$$(x,y) \neq (0,0), \quad f(0,0) = 0$$

$$(ii) \frac{1}{x} \sin xy \quad x \neq 0 \quad f(0, y) = y$$

$$(iii) \frac{\sin x - \sin y}{\tan x - \tan y} \quad \tan x \neq \tan y ,$$

$$\cos^3 x \quad \tan x \neq \tan y$$

٨-٥ المتغيرات التابعة والمستقلة:

عند صياغة مسألة ما تحتوي على متغيرات عديدة قد يكون من غير الممكن أن نحدد من صياغة المسألة أى المتغيرات مستقلة وأيها تابعة. لذا وجب عند علاج مسألة من هذا النوع أن ننص على المتغيرات التابعة والمستقلة أو أن نتعامل مع كل الحالات الممكنة.

$$\text{مثال ١٢: أوجد } \frac{\partial u}{\partial x} \text{ إذا كان } u=f(x,y), y=g(x,z)$$

من المطلوب نرى أن x متغير مستقل بينما u تابع. وحيث أنه يوجد متغيران تابعان مناظران للمعادلتين من ثم فإنه يوجد حالتان:

الحالة الأولى: نعتبر u, z متغيرين تابعين وأن x, y متغيران مستقلان

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f_x, \quad 0 = g_x + g_z \frac{\partial z}{\partial x} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f_x, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{g_x}{g_z}$$

الحالة الثانية: نعتبر u, y متغيرين تابعين للمتغيرين المستقلين (x, z)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = g_x \Rightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f_x + f_y g_x, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = g_x$$

مثال ١٣: إذا كانت $u = ax + by, v = bx - ay$ فلتبث أن

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_v = a^2 / (a^2 + b^2)$$

حيث الرمز أسفل المشتقة يعنى المتغير المستقل الآخر.

لإيجاد $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y$ نعتبر x, y متغيرات مستقلة. من ثم $\frac{\partial u}{\partial x} = a$

لإيجاد $(\frac{\partial x}{\partial u})_v$ نعتبر u, v متغيرات مستقلة. بتفاضل كل معادلة من معادلات التحويل

$$1 = a \frac{\partial x}{\partial u} + b \frac{\partial y}{\partial u} \quad , \quad 0 = b \frac{\partial x}{\partial u} - a \frac{\partial y}{\partial u}$$

وبحل هاتين المعادلتين نحصل على $\partial x / \partial u = a / (a^2 + b^2)$ أى أن

$$(\frac{\partial u}{\partial x})_y (\frac{\partial x}{\partial u})_v = a^2 / (a^2 + b^2)$$

٩-٥ تفاضلات (Differentials)

نفرض أن الدالة $z = f(x, y)$ قابلة للتفاضل، من ثم

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

$$= f_x(x, y) \Delta x + f_y(x, y) \Delta y + \phi(\Delta x, \Delta y) \Delta x + \psi(\Delta x, \Delta y) \Delta y$$

حيث نؤول كل من ϕ, ψ إلى الصفر عندما نؤول $(\Delta x, \Delta y)$ إلى $(0, 0)$ نعرف تفاضلة z والتي نرمز لها بالرمز dz بأنه الجزء الرئيسى (الجزء الخطى) فى $(\Delta x, \Delta y)$

$$dz = f_x(x, y) \Delta x + f_y(x, y) \Delta y$$

وأيضا نعرف تفاضلات المتغيرات المستقلة dx, dy بأنها التغيرات $\Delta x, \Delta y$ على الترتيب. من ثم

$$dz = df(x, y) = f_x(x, y) dx + f_y(x, y) dy$$

تسمى dz التفاضلية الكلية (Total differential) للمتغير z .

إذا كانت $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ فإن

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n$$

مثال ١٤: المتغيرات المستقلة x, y, z تحقق العلاقة $f(x, y, z) = 0$. سوف نثبت أن

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$$

حيث الأداة أسفل المشتقة تعني نفس المعنى كما في المثال السابق.

$$f(x, y, z) = 0 \quad \text{بأخذ تفاضلة للعلاقة}$$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

حيث dx, dy, dz تغيرات صغيرة في x, y, z . يمكن الحصول على

$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z$ كعملية نهائية للنسبة $\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)$ عندما نزول Δy إلى الصفر
بينما تبقى z ثابتة أي أن

$$\frac{\partial f}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$1.6. \quad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = -f_y / f_x$$

بالمثل

$$\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = -f_z / f_y, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -f_x / f_z$$

نتج العلاقة المطلوبة بالضرب.

مثال ١٥: إذا كانت $z = x^3 + 2y^2 - xy$ أوجد $\Delta z - dz$

$$\Delta z = (x + \Delta x)^3 + 2(y + \Delta y)^2 - (x + \Delta x)(y + \Delta y) - x^3 - 2y^2 + xy$$

$$= 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 4y\Delta y + 2(\Delta y)^2 - x\Delta y - y\Delta x - \Delta x\Delta y$$

$$dz = f_x \Delta x + f_y \Delta y = (3x^2 - y) \Delta x + (4y - x) \Delta y$$

$$\Delta z - dz = 3x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3 + 2(\Delta y)^2 - \Delta x \Delta y$$

يجب أن نلاحظ أن التفاضلة الكلية du لدالة من n من المتغيرات هي مجموعة n من الحدود محتوية على تفاضلات للمتغيرات المستقلة dx كذلك هي تقريب جيد للتغير Δu بمعنى أن المقدار $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} / (\Delta u - du)$ يؤول إلى الصفر عند تقرب كل Δx_i من الصفر. من ثم يصبح لدينا أساساً في استخدام التفاضلات في الحسابات التقريبية.

تفاضلات الدوال غير بسيطة التركيب تبلى على صيغة تفاضلة دالة ميان كانت المتغيرات المتداولة مستقلة أولاً. مثلاً.

$$d(u+v) = du + dv$$

$$d(uv) = \frac{\partial}{\partial u} (uv) du + \frac{\partial}{\partial v} (uv) dv = v du + u dv$$

١٠-٥ التفاضلات التامة (Exact differentials)

عرفنا تفاضلة دالة بأنها الجزء الرئيسي (الخطي) في التغير في المتغير التابع الناتج من تغيرات في المتغيرات المستقلة. حيث أن تفاضلة المتغير المستقل تصلوى التغير فيه، بالتالى إذا كانت u دالة متغيرين x, y فإن

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \quad (1)$$

أى تعبير على الهيئة

$$Pdx + Qdy \quad (2)$$

(يُتَراض أن للدوال P, Q لها مشتقات جزئية متصلة) يسمى فاضلة تامة إذا

$$du = P dx + Q dy \text{ وجدت دالة } u \text{ بحيث}$$

نعرض للشروط اللازمة والكافية حتى تكون (2) تفاضلة تامة.

نفرض أن (2) تفاضلة تامة، أى توجد دالة u بحيث

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = P dx + Q dy$$

يؤدى هذا بدوره إلى أن

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q$$

ولكن $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ تؤدي إلى أن

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (3)$$

وهو الشرط اللازم حتى تكون (2) تفاضلة تامة. سوف نثبت أيضا

أن هذا الشرط كافٍ وذلك بأن نكون دالة u (اعتمادا على تحقق (3) تفاضلتها هي (2)).

$$u = \int P dx + g(y) \text{ نحصل على } \frac{\partial u}{\partial x} = P \text{ من الشرط}$$

حيث ثابت التكامل $g(y)$ هو دالة إختيارية فى y ، أى أنه لإيجاد u وجب إيجاد $g(y)$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q = \left(\frac{\partial}{\partial y} \int P dx \right) + g'(y)$$

$$g'(y) = Q - \frac{\partial}{\partial y} \int P dx$$

$$\text{i.e.,} \quad g(y) = \int \left[Q - \frac{\partial}{\partial y} \int P dx \right] dy$$

شرط أن يكون التكامل دالة في y فقط. حقيقة، الدالة g دالة في y فقط
وذلك لأن

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(Q - \frac{\partial}{\partial y} \int P dx \right) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{\partial P}{\partial y} dx$$

$$= \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

استنادا إلى (3).

مثال ١٦: لإثبات أن $(2x + e^x \sin y) dx + (3y^2 + e^x \cos y) dy$ تناضلة تامة لدالة u وإيجاد هذه الدالة نضع

$$P = 2x + e^x \sin y, \quad Q = 3y^2 + e^x \cos y$$

فدوال P, Q لهما مشتقات أولى متصلة وكذلك

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^x \cos y = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

أي أن التفاضلة المعطاة تناضلة تامة.

لإيجاد الدالة u

$$u = \int (2x + e^x \sin y) dx = x^2 + e^x \sin y + g(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q = g'(y) + e^x \cos y = 3y^2 + e^x \cos y$$

$$\text{i.e. } g'(y) = 3y^2 \rightarrow g(y) = y^3$$

$$u = x^2 + y^3 + e^x \sin y \quad \text{بالتالى}$$

لتفاضلة الكلية لدالة ثلاث متغيرات $v(x,y,z)$ تكون بالهيئة

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz$$

وعلى هذا فإن أى صيغة

$$P dx + Q dy + R dz \quad (4)$$

تكون تفاضلة تامة لدالة v إذا كانت

$$P = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial v}{\partial z}$$

وهذا بدوره يؤدي إلى

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \quad (5)$$

يمكن أيضا التحقق من أن الشروط (5) شروط كافية بفرض أن للدوال P, Q, R مشتقات أولى متصلة حتى تكون الصيغة (4) تفاضلة كلية (أو تامة) لدالة. الشروط (5) يمكن أيضا كتابتها بالهيئة.

$$\begin{vmatrix} 1 & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

محدد الطرف الأيسر يرمز له بالرمز $\nabla \times F$ (ويرأ $\text{curl } F$) حيث

$$F = P i + Q j + R k$$

أى تعبير على الهيئة (4) لا يمكن جعله تفاضلة تامة لدالة ϕ بضربه فى معامل مكامل ϕ أى يصبح التعبير

$$\phi P dx + \phi Q dy + \phi R dz$$

تفاضلة تامة لدالة u في حالة ثلاث متغيرات أو أكثر ليس من الممكن دائما إيجاد مثل هذه الدالة في ظل تحقق (5) ولكن من الممكن إيجاد مثل هذه الدالة إذا كانت P, Q, R تحقق الشرط التالي (يفرض أن للدوال P, Q, R مشتقات جزئية متصلة).

$$P\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + Q\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + R\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0 \quad (6)$$

حقيقة

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

$$= \phi P dx + \phi Q dy + \phi R dz \Rightarrow$$

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = \phi P, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \phi Q, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \phi R$$

من التساوى ونظيره نحصل على $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$

$$\phi \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = Q \frac{\partial \phi}{\partial x} - P \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (7)$$

$$\phi \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} \right) = R \frac{\partial \phi}{\partial y} - Q \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (8)$$

$$\phi \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) = P \frac{\partial \phi}{\partial z} - R \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (9)$$

يجمع (7) + (8) + (9) نحصل على الشرط اللازم (6)

الشرط (6) يمكن أيضا كتابته بالصيغة

$$0 = \begin{vmatrix} P & Q & R \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} =$$

$$= (P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}) \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{F})$$

$$\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k} \quad \text{حيث}$$

١١- مشتقات دوال مركبة. قاعدة التسلسل

(Differentiation of composite functions. Chain rule)

نفرض أن دالة قابلة للتفاضل في منطقة ما R وأن x, y دوال قابلة للتفاضل في متغيرات u, v نعلم أن

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

$$\text{حيث } (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \rightarrow (0, 0) \text{ عندما } (\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$$

بالقسمة على Δu وإيجاد النهاية عندما نؤول Δu إلى الصفر نحصل على

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$$

بالمثل

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$

قواعد لإنتاج مشتقة دالة دالة تسمى قواعد التسلسل.

إذا كانت $z = z(x, y)$ قابلة للتفاضل وكانت x, y دوال قابلة للتفاضل

من متغير t فإن

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

إذا كانت $u = f(\lambda)$ وكانت $x = g(r, \theta)$ فإن

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{du}{d\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial s}$$

يمكن تطبيق قواعد التفاضل لإيجاد مشتقات من رتب أعلى.

مثلا إذا كانت $z = z(x, y)$ وكانت $x = x(u, v)$ ، $y = y(u, v)$ فإن

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} &= \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{\partial z}{\partial u} \right] = \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \right] \\ &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial x}{\partial u} \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \frac{\partial y}{\partial u} \right] + \\ &\quad + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \frac{\partial y}{\partial u} \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial u} \right] \end{aligned}$$

مثال: إذا كانت f دالة من (x, y) وكانت

$$u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y$$

فإن

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y \frac{\partial f}{\partial u} + e^x \sin y \frac{\partial f}{\partial v} \\ &= u \frac{\partial f}{\partial u} + v \frac{\partial f}{\partial v} \end{aligned}$$

مثال: إذا كانت $u = u\left(\frac{y-x}{xy}, \frac{z-x}{xz}\right)$ فثبت أن

$$x^2 \frac{\partial u}{\partial x} + y^2 \frac{\partial u}{\partial y} + z^2 \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

بوضع

$$r = \frac{y-x}{xy} \quad s = \frac{z-x}{xz}$$

نحصل على

$$\frac{\partial I}{\partial x} = \frac{1}{x^2}, \quad \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{1}{x^2}, \quad \frac{\partial I}{\partial y} = \frac{1}{y^2}, \quad \frac{\partial S}{\partial z} = \frac{1}{z^2},$$

$$\frac{\partial I}{\partial z} = 0 = \frac{\partial S}{\partial y}$$

من ثم

$$x^2 \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial s}, \quad y^2 \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad z^2 \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial s}$$

بالجمع نحصل على المطلوب.

مثال ١٧: إذا كانت $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ وكنت u دالة من x, y

فإن

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x} (-r \sin \theta) + \frac{\partial u}{\partial y} r \cos \theta$$

بحل المعادلتين الخطيتين السابقتين في $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ نحصل على

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

المعادلتان الأخيرتان يعبرون عن تكافؤ المؤثرات

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

بالنسبة للتحويل للمعطى.

يمكن إيجاد $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ كالآتي:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\cos \theta \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \\ &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \\ &\quad + \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\end{aligned}$$

بالمثل

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \\ &= \sin^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \\ &\quad - \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\end{aligned}$$

بجمع العلاقتين الأخيرتين نحصل على

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

مثال ١٨:

إذا كانت z دالة من x, y وكانت $x = \cosh u \cos v$, $y = \sinh u \sin v$,

فلوجد

$$(i) \quad \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 \quad , \quad (ii) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

معادلات التحويل نكتب من

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = \sinh u \cos v \frac{\partial z}{\partial x} + \cosh u \sin v \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} = -\cosh u \sin v \frac{\partial z}{\partial x} + \sinh u \cos v \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\rightarrow \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = (\sinh^2 u \cos^2 v + \cosh^2 u \sin^2 v)$$

$$x \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \right]$$

$$\sinh^2 u \cos^2 v + \cosh^2 u \sin^2 v = \cos^2 v (\cosh^2 u - 1)$$

$$+ \cosh^2 u (1 - \cos^2 v) = \cosh^2 u - \cos^2 v$$

$$\text{i.e.} \quad \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = (\cosh^2 u - \cos^2 v)$$

$$x \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \right]$$

لإيجاد (ii) نضع مشتقات الترتيب الأولى بصورة خاصة

$$\frac{\partial z}{\partial u} + i \frac{\partial z}{\partial v} = \sinh u \cos v \left(\frac{\partial z}{\partial x} + i \frac{\partial z}{\partial y} \right) +$$

$$+ \cosh u \sin v \left(\frac{\partial z}{\partial y} - i \frac{\partial z}{\partial x} \right)$$

$$= \sinh(u - iv) \left(\frac{\partial z}{\partial x} + i \frac{\partial z}{\partial y} \right) \quad *$$

بوضع i بدلا من i نحصل على

$$\frac{\partial z}{\partial u} - i \frac{\partial z}{\partial v} = \sinh(u + iv) \left(\frac{\partial z}{\partial x} - i \frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

بتطبيق المؤثر $\frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v}$ على المعادلة .

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right) \left(\frac{\partial z}{\partial u} + i \frac{\partial z}{\partial v} \right) \\
 &= \cosh(u-iv) \left[\left(\frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right) (u-iv) \right] \left(\frac{\partial z}{\partial x} + i \frac{\partial z}{\partial y} \right) \\
 &+ \sinh(u-iv) \left[\left(\frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right) \left(\frac{\partial z}{\partial x} + i \frac{\partial z}{\partial y} \right) \right] \\
 \therefore \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} &= \cosh(u-iv) [1-1] \left(\frac{\partial z}{\partial x} + i \frac{\partial z}{\partial y} \right) \\
 &+ \sinh(u-iv) \sinh(u+iv) \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial z}{\partial x} + i \frac{\partial z}{\partial y} \right) \\
 &= \frac{1}{2} (\cosh 2u - \cosh 2iv) \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \\
 &= (\cosh^2 u - \cos^2 v) \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)
 \end{aligned}$$

مثال ١٩: إذا كانت f دالة من u حيث $u = ax^2 + 2hxy + by^2$

وكانت $f(u)$ عندما يعبر عنها كدالة من (x, y) تأخذ الهيئة $g(x, y)$ فإن

$$x \frac{\partial g}{\partial x} + y \frac{\partial g}{\partial y} = 2u \frac{df}{du}$$

بإشتقاق العلاقة $f(u) = g(x, y)$ بالنسبة إلى x ثم بالنسبة إلى y نحصل على

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{df}{du} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df}{du} (2ax + 2hy) \Rightarrow xg_x = (2ax^2 + 2hxy) \frac{df}{du}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{df}{du} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{df}{du} (2hx + 2by) \Rightarrow yg_y = (2hxy + 2by^2) \frac{df}{du}$$

بالجمع نحصل على العلاقة المطلوبة.

مثال ٢٠: إذا عرفت العلاقة $g(u^2-z^2, u^2-y^2, u^2-x^2)$ المتغير u كدالة في x, y, z فإن

$$\frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{z} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{u}$$

لإثبات العلاقة المطلوبة نضع $X=u^2-x^2, Y=u^2-y^2, Z=u^2-z^2$ تصبح العلاقة $g(X,Y,Z)=0$ بالاشتقاق بالنسب إلى كل من x,y,z نحصل على

$$g_x \frac{\partial X}{\partial x} + g_y \frac{\partial Y}{\partial x} + g_z \frac{\partial Z}{\partial x} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow g_x (2u \frac{\partial u}{\partial x} - 2x) + g_y (2u \frac{\partial u}{\partial x}) + g_z (2u \frac{\partial u}{\partial x}) = 0 \quad (1)$$

بالمثل

$$g_x (2u \frac{\partial u}{\partial y}) + g_y (2u \frac{\partial u}{\partial y} - 2y) + g_z (2u \frac{\partial u}{\partial y}) = 0 \quad (2)$$

$$g_x (2u \frac{\partial u}{\partial z}) + g_y (2u \frac{\partial u}{\partial z}) + g_z (2u \frac{\partial u}{\partial z} - 2z) = 0 \quad (3)$$

بحذف $g_x g_y g_z$ نحصل على العلاقة المطلوبة.

تمارين ٢

١ - أ) لوجد $dz = dz$ حيث $Z = x^2 y^2$

ب) إذا كانت $f(x, y) = x + x^3 y^2 - 4 \log x - 10 \ln y$

لوجد $df(1, 2)$

٢ - نغرض أن z دالة من x, y وأن $v = ay - bx$, $u = ax + by$ أثبت أن

$$Z_{xx} + Z_{yy} = (a^2 + b^2) (Z_{uu} + Z_{vv})$$

٣ - بتبديل المتغيرات x, t إلى المتغيرات u, v بالعلاقات

$$y_{xx} - y_{tt} = a^2 y_{uv} \quad \text{أن أثبت أن } u = x - at, v = x + at$$

٤ - لأي دالة $f(x, y)$ حيث $x = e^u \cosh v, y = e^u \sinh v$

أثبت أن

$$(i) \quad \frac{\partial f}{\partial u} = x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y},$$

$$(ii) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = xy \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) + (x^2 + y^2) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

٥ - إذا كانت $\omega = f(y-z, z-x, x-y)$ أثبت أن $\omega_x + \omega_y + \omega_z = 0$

٦ - إذا كانت w دالة من u, v وكانت u, v دوال من x, y بحيث

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

أثبت

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} \right]$$

٧ - إذا كانت z دالة من x, y وكانت $x = e^u \cos v, y = e^u \sin v$ فثبت أن

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = e^{2u} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)$$

٨ - إذا كانت $z = f(x, y)$ وكانت $u = x^2 - y^2, v = 2xy$ فثبت أن

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 = 4(x^2 + y^2) \left[\left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 \right]$$

٩ - أوجد قيم الثوابت a, b بحيث يحول التحويل

$$v = x + by, u = x + ay$$

$$9 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 9 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 0 \quad \text{إلى}$$

١٠ - إذا كانت $x = u + e^{-v} \sin u, y = v + e^{-v} \cos u$ فوجد

$$\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}$$

١١ - إذا تحولت الدالة $g(u, v)$ إلى الدالة $f(x, y)$ بالتحويل

$$u = x^2 + y^2, \quad v = \frac{x}{y}$$

$$(i) \quad x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 2u \frac{\partial g}{\partial u}$$

$$(ii) \quad y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} = (1 + v^2) \frac{\partial g}{\partial v}$$

$$v' = x^2 + 2u^2 \quad , \quad u' = v^2 + y \quad \text{إذا كانت} \quad - 12$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{لوجد}$$

$$x, y \quad \text{إذا كانت} \quad u = x + y, \quad v = \sqrt{xy} \quad \text{وكانت } z \text{ دالة من} \quad - 13$$

$$xz_x + yz_y = uz_u + vz_v \quad \text{ثبت أن}$$

$$z(x, y) = f(u, v) \quad \text{إذا كانت} \quad \text{حيث}$$

$$u = x \phi\left(\frac{y}{x}\right) \quad , \quad v = y \phi\left(\frac{x}{y}\right)$$

ثبت أن

$$xz_x + yz_y = uf_u + vf_v$$

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0 \quad \text{إذا ارتبطت المتغيرات } x, y, z \text{ بالعلاقة} \quad - 14$$

$$\phi(x, y, z) = x^3 y^2 z \quad \text{وكان} \quad \phi_x(1, 1, 1) \quad \text{لوجد} \quad \text{علما}$$

$$x, y, z \quad \text{تكون المتغيرات المستقلة هي:} \quad (i) \quad x, y \quad , \quad (b) \quad x, z$$

$$- 15 \quad \text{إذا ارتبطت المتغيرات } x, y, z \text{ بالعلاقات}$$

$$f(x, y, z) = 0 \quad , \quad x^2 + y^2 + z^2 = \text{const}$$

ثبت أن

$$\frac{dy}{dx} = -(zf_x - xf_z) / (zf_y - yf_z)$$

$$x = \frac{au + bv}{u^2 + v^2} \quad , \quad y = \frac{bu - av}{u^2 + v^2} \quad \text{إذا كانت} \quad - 16$$

ثبت أن

$$v \frac{\partial x}{\partial u} - u \frac{\partial x}{\partial v} = -y$$

١٢-٥ مشتقات الدوال الضمنية (Differentiation of implicit functions)

إذا أمكن من معادلة $f(x,y) = \text{constant } c$ إيجاد دالة أو أكثر

$y = \phi(x)$ وحيدة القيم تحقق المعادلة فإننا نقول أن y دالة ضمنية معرفة

بالمعادلة $f(x,y) = c$ ، لإيجاد مشتقة y بالنسبة إلى x نوجد تفاضلة f ثم

بالتسمة على Δx وإيجاد النهاية عندما $\Delta x \rightarrow 0$ نحصل على

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = - \frac{f_x}{f_y}$$

شرط ألا ينعدم $\frac{\partial f}{\partial y}$

بالمثل إذا كانت $f(x,y,z) = c$ نعرف z كدالة ضمنية من (x,y) بحيث

$$f(x,y,z) \in \mathbb{C}^1, \quad \frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z) \neq 0$$

فإن

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow z_x = - \frac{f_x}{f_z}$$

$$z_y = - \frac{f_y}{f_z} \quad \text{وكذلك}$$

مثال ٢١: أوجد $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ من المعادلة

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

بالاشتقاق بالنسبة إلى x ثم بالنسبة إلى y نحصل على

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2z}{c^2} \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{2y}{b^2} + \frac{2z}{c^2} \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

بالإشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى x ثم بالنسبة إلى y

$$\frac{2}{a^2} + \frac{2}{c^2} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \frac{2z}{c^2} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{2}{c^2} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{2z}{c^2} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

حل المعادلتين الأخريتين في z_{xx} , z_{xy} مع استخدام المعادلتين في z_x , z_y

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{c^2}{a^4} \frac{a^2 z^2 + c^2 x^2}{z^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{c^4}{a^2 b^2} \frac{xy}{z^3}$$

مثال ٢٢: إذا كانت $u = f(x, y)$ فإن

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx}$$

$$i.e. \quad \frac{du}{dx} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{1 - \frac{\partial f}{\partial y}}$$

١٢-٥ تبديل المتغيرات ودوال ضمنية معرفة بنظم معادلات

نفرض أن للدوال

$$\omega = \omega(u, v), \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

هي دوال متصلة مع مشتقاتها الجزئية. إذ أمكن التعبير عن u, v كدوال من

x, y وبالتعويض في ω فإننا نحصل على دالة $\omega = W(x, y)$ ومنها يمكن

إيجاد $\frac{\partial \omega}{\partial y}, \frac{\partial \omega}{\partial x}$ قد نشعر بالإضافة إلى أنه ليس دائماً من الممكن علينا

إيجاد W لذا سوف نلجأ لحساب ω_x, ω_y بطريقة غير مباشرة.

$$\frac{\partial \omega}{\partial u} = \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial v} = \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$

المعادلتان السابقتان يمكن اعتبارهما معادلتين خطيتين في ω_x, ω_y
يفرض أن الجاكوبيان $\partial(x, y) / \partial(u, v)$ المعرف كالآتي:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

لا يساوى صفراً فإنه يمكن استخدام طريقة كرامر للحصول على

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \omega}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial \omega}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} / \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial(\omega, y)}{\partial(u, v)} / \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial \omega}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial \omega}{\partial v} \end{vmatrix} / \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

ملحوظة: نطلق كلمة جاكوبيان أحياناً على المصفوفة بالتناظير السابق
وأحياناً أخرى على محدد هذه المصفوفة

مثال ٢٢: إذا كانت $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, \omega(r, \theta)$

فإن

$$\frac{\partial \omega}{\partial r} = \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial \omega}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial \omega}{\partial y} \sin \theta$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \theta} = \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial \omega}{\partial x} r \sin \theta + \frac{\partial \omega}{\partial y} r \cos \theta$$

بحل المعادلتين المتبقيتين في $\frac{\partial \omega}{\partial x}$, $\frac{\partial \omega}{\partial y}$ نحصل على

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta},$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta}$$

حالات أخرى:

الحالة الأولى: نفرض أن u, v, ω دوال من المتغير المستقل x من خلال المعادلات الضمنية

$$f(u, v, \omega, x) = 0; g(u, v, \omega, x) = 0; h(u, v, \omega, x) = 0$$

يمكن حساب $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$, $\frac{d\omega}{dx}$ كالآتي

$$\frac{du}{dx} = -\frac{\partial(f, g, h)}{\partial(x, v, \omega)} / \frac{\partial(f, g, h)}{\partial(u, v, \omega)}$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{\partial(f, g, h)}{\partial(u, x, \omega)} / \frac{\partial(f, g, h)}{\partial(u, v, \omega)},$$

$$\frac{d\omega}{dx} = -\frac{\partial(f, g, h)}{\partial(u, v, x)} / \frac{\partial(f, g, h)}{\partial(u, v, \omega)},$$

$$\frac{\partial(f, g, h)}{\partial(u, v, \omega)}$$

شرط ألا ينعدم المقام

مثال ٢٤: أوجد $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ من العلاقات

$$u^2 - v^2 + 2x = 0, uv - y = 0$$

بالتفاضل بالنسبة إلى x

$$2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} + 1 \right) = 0, \quad v \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = -u/(u^2+v^2), \quad \frac{\partial v}{\partial x} = v/(u^2+v^2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(u^2+v^2) - 2\left(u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + v\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right)u}{(u^2+v^2)^2} \\ &= \frac{u(u^2+v^2) - 2u(u^2+v^2)}{(u^2+v^2)^3} = \frac{u(3v^2-u^2)}{(u^2+v^2)^3} \end{aligned}$$

مثال ٢٥: أوجد $\frac{\partial \omega}{\partial x}$ إذا كانت

$$\omega = uv, \quad u^2 + v + x = 0, \quad v^2 - u - y = 0$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial x}$$

أيضا

$$2u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} + 1 = 0, \quad -\frac{\partial u}{\partial x} + 2v \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-2v}{4uv+1}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{4uv+1}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{-u}{4uv+1} - \frac{2v^2}{4uv+1} = -\frac{u+2v^2}{4uv+1}$$

مثال ٢٦: إذا كانت

$$u+v+\omega=x \quad u^2+v^2+\omega^2=2x-1, \quad u^3+v^3+\omega^3=3$$

أوجد $\frac{du}{dx}$

$$\frac{\partial(f,g,h)}{\partial(x,v,\omega)} = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2v & 3v^2 \\ 1 & 2\omega & 3\omega^2 \end{vmatrix}$$

$$= -6v\omega(\omega - v - 6(\omega^2 - v^2)) = 6(\omega - v)(\omega + v - 6\omega v)$$

$$1 \quad 2u \quad 3u^2$$

$$\frac{\partial(f, g, h)}{\partial(u, v, \omega)} = \begin{vmatrix} 1 & 2v & 3v^2 \\ 1 & 2\omega & 3\omega^2 \end{vmatrix} = 5(u-v)(v-\omega)(\omega-u)$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{\partial(f, g, h)}{\partial(x, v, \omega)} \quad / \quad \frac{\partial(f, g, h)}{\partial(u, v, \omega)} = \frac{(\omega + v - \omega v)}{(u - v)(u - \omega)}$$

الحالة الثانية: نفرض ان المعادلات

$$f(u, v, \omega, x, y, z) = 0$$

$$g(u, v, \omega, x, y, z) = 0$$

$$h(u, v, \omega, x, y, z) = 0$$

تعرف u, v, ω كنوال من x, y, z من ثم

$$f_u \frac{\partial u}{\partial x} + f_v \frac{\partial v}{\partial x} + f_\omega \frac{\partial \omega}{\partial x} = -f_x$$

$$g_u \frac{\partial u}{\partial x} + g_v \frac{\partial v}{\partial x} + g_\omega \frac{\partial \omega}{\partial x} = -g_x$$

$$h_u \frac{\partial u}{\partial x} + h_v \frac{\partial v}{\partial x} + h_\omega \frac{\partial \omega}{\partial x} = -h_x$$

بحل هذه المعادلات نحصل على

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial(f, g, h)}{\partial(x, v, \omega)} \frac{1}{\Delta}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial(f, g, h)}{\partial(u, x, \omega)} \frac{1}{\Delta},$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = -\frac{\partial(f, g, h)}{\partial(u, v, x)} \frac{1}{\Delta}$$

$$\Delta = \frac{\partial(f, g, h)}{\partial(u, v, \omega)} \neq 0$$

حيث

٥-١٤ (The inverse of a transformation) تحويل

أى مجموعة معادلات

$$u = f(x, y, z) \quad , \quad v = g(x, y, z) \quad , \quad \omega = h(x, y, z)$$

تسمى تحويلًا حيث تتقل المعادلات الابتدائيات (x, y, z) إلى الابتدائيات (u, v, ω) . إذا أمكن حل هذه المعادلات في x, y, z فإننا نحصل على ثلاث دوال في u, v, ω تسمى معكوس التحويل الأصلي.

يمكن الحصول على مشتقات x, y, z بالنسبة إلى u, v, ω بدون معرفة التحويل العكسي بوضع

$$F(u, v, \omega, x, y, z) = u - f(x, y, z)$$

$$G(u, v, \omega, x, y, z) = v - g(x, y, z)$$

$$H(u, v, \omega, x, y, z) = \omega - h(x, y, z)$$

إذا استأنفنا كما سبق نحصل على المشتقات المطلوبة. مثلاً

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \omega} &= - \frac{\partial(F, G, H)}{\partial(x, \omega, z)} \bigg/ \frac{\partial(F, G, H)}{\partial(x, y, z)} \\ &= \begin{vmatrix} f_x & g_x & h_x \\ 0 & 0 & 1 \\ f_z & g_z & h_z \end{vmatrix} \bigg/ \begin{vmatrix} f_x & g_x & h_x \\ f_y & g_y & h_y \\ f_z & g_z & h_z \end{vmatrix} \\ &= - \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, z)} \bigg/ \frac{\partial(f, g, h)}{\partial(x, y, z)} \quad , \quad \frac{\partial(f, g, h)}{\partial(x, y, z)} \neq 0 \end{aligned}$$

مثال ٢٧: لوجد $\frac{\partial u}{\partial x}$ باستخدام الجاكوبيان إذا كانت

$$v = g(u, v, y), \quad u = f(u, v, x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)} / \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}$$

حيث

$$F = u - f(u, v, x), \quad G = v - g(u, v, y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = - \left| \begin{array}{cc} -f_x & 0 \\ -f_v & -g_v \end{array} \right| / \left| \begin{array}{cc} 1-f_u & -g_u \\ -f_v & 1-g_v \end{array} \right|$$

$$= - \frac{f_x g_v}{(1-f_u)(1-g_v) - g_u f_v}$$

الجاكوبيات (Jacobians)

سوف نعرض الآن لبعض من خواص الجاكوبيات.

نفرض أن جاكوبيان التحويل $u = g(x, y), v = g(x, y)$

$$J = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \neq 0$$

وأن جاكوبيان التحويل العكسي هي

$$K = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

لحساب العلاقات بينهما نرى أن

$$1 = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}, \quad 0 = \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}, \quad 1 = \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$

أى أن

$$\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

نلاحظ العلاقة المساعدة لتذكر علاقة جاكوبيان تحويل ومعكوسة ومى حذف الرموز

$$\text{or} \quad \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = 1$$

$$\text{i.e.} \quad JK=1$$

أيضا

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{g_y}{J}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{g_x}{J}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{f_y}{J}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{f_x}{J}$$

لدراسة ارتباط جاكوبيات تحويل ومعكوسة فى حالة ثلاث دوال افرض

$$u=f(x, y, z), \quad v=g(x, y, z), \quad \omega=h(x, y, z)$$

$$J = \frac{\partial(u, v, \omega)}{\partial(x, y, z)} \quad K = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, \omega)}$$

نكتب محدد المتغيرات الجبرية للمحدد

$$J = \begin{vmatrix} f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \\ h_x & h_y & h_z \end{vmatrix}$$

على الهيئة

$$F_x, F_y, F_z$$

$$i.e. G_x, G_y, G_z$$

$$H_x, H_y, H_z$$

من العلاقات

$$1 = f_x x_u + f_y y_u + f_z z_u, \quad 0 = g_x x_u + g_y y_u + g_z z_u,$$

$$0 = f_x x_v + f_y y_v + f_z z_v, \quad 1 = g_x x_v + g_y y_v + g_z z_v,$$

$$0 = f_x x_w + f_y y_w + f_z z_w, \quad 0 = g_x x_w + g_y y_w + g_z z_w,$$

$$0 = h_x x_u + h_y y_u + h_z z_u$$

$$0 = h_x x_v + h_y y_v + h_z z_v$$

$$1 = h_x x_w + h_y y_w + h_z z_w$$

نرى أن

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\begin{vmatrix} g_y & g_z \\ h_y & h_z \end{vmatrix}}{J} = \frac{F_x}{J}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{F_y}{J}, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{F_z}{J}$$

بالمثل يمكن الحصول على علاقات مشابهة للشتقات بالنسبة إلى

v, w . من هذه العلاقات نحصل بسهولة نحصل بسهولة على $K = L/J^3$

ولكن

$$JL = \begin{vmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & J \end{vmatrix} = J^3$$

ومن ثم $K = 1$ (والتي كن من الممكن إستنتاجها مباشرة من علاقات

الاشتقاق الأخرى).

مثال ٢٨: إذا كانت $f(u,v,x,y)=0$, $g(u,v,x,y)=0$ فإن

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} \quad / \quad \frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}$$

بتفاضل العلاقتان المعطيتان بالنسبة إلى x وكذلك بالنسبة إلى y

$$\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial y} = 0,$$

نعتبر

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \cdot \frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f_u & g_u \\ f_v & g_v \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -f_x & -g_x \\ -f_y & -g_y \end{vmatrix} = - \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}$$

١٦- الإرتباط الدالي (Functional dependence)

الحل العام لأنواع خاصة من المعادلات التفاضلية الجزئية يكون على الهيئة $z = f(u(x,y)) + g(v(x,y))$ حيث u, v حلان مستقلان خاصان بينما f, g دوال إختيارية من هذه التعبيرات. إذا كانت v دالة من u يكون حدى الحل الخاص دوال من u وبذا لا تحصل على الحد العام. مثلاً التعبير

$$z = f(x+y) + g(x^2 + 2xy + y^2 + 1) = f(u) + g(v)$$

فيه $v = u^2 + 1$ ومن ثم فإن الحدين يكونان دوال من التركيب $u = x + y$.
أيضا إذا اعتبرنا الدالتين $f = \sin(x^2 + y^2)$, $g = \cos(x^2 + y^2)$ فإنه توجد

دالة F بحيث

$$0 = F(f, g) = f^2 + g^2 - 1$$

ويذا ترتبط الدالتان بارتباط ينفي كونها مستقلتان دلليا مما يستوجب أن نقدم التعريف التالي.

تعريف: نقول عن دالتين f, g أنهما مرتبطتان دلليا إذا أمكن التعبير عن إحداهما على هيئة دالة من الأخرى أو إذا وجدت دالة F بحيث $F(f, g) = 0$
نفرض أن الدالتين $u(x, y)$, $v(x, y)$ مرتبطتان دلليا، أي أنه توجد

دالة F لاساوى تطابقا الصفر بحيث $F(u, v) = 0$

بحساب المشتقات الجزئية نحصل على

$$\frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

هاتان المعادلتان الخطيتان في $\frac{\partial F}{\partial u}$, $\frac{\partial F}{\partial v}$ لهما حل غير تافه فقط فى حالة إعدام محدد المعاملات

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$$

أي أن الدالتين u, v تكونان مرتبطتان دلليا إذا إنعدم الجاكوبيان لهما تطابقا

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \neq 0.$$

يمكن أيضا أن نثبت المقولة العكسية الآتية:

نظرية إذا حققت الدالتان $f(x,y)$, $g(x,y)$ الشروط الآتية في جوار نقطة (x_0, y_0)

$$1) \quad f(x,y), g(x,y) \in C^1$$

$$2) \quad \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} \neq 0$$

$$3) \quad f_y(x_0, y_0) \neq 0$$

من ثم توجد دالة $F(z)$ بحيث

$$g(x,y) = F(f(x,y))$$

في جوار (x_0, y_0) .

الإثبات: نضع $z_0 = f(x_0, y_0)$ بحل المعادلة $f(x,y) - z = 0$ في y

$$y = \phi(x, z)$$

في جوار للنقطة (x_0, y_0, z_0) يمكن حساب $\phi_x(x, z)$ بدلالة f

$$\phi_x(x, z) = -\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}, \quad y = \phi(x, z)$$

بحساب مشتقة $g(x, \phi(x, z))$ بدلالة x مستعملين العلاقة السابقة

$$\frac{\partial}{\partial x} g(x, \phi(x, z)) = g_x - \frac{f_x g_y}{f_y}$$

$$= -\frac{1}{f_y} \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} = 0$$

بتكامل هذه العلاقة نحصل على

$$g(x, \phi(x, z)) = F(z)$$

لدالة ما $z = f(x, y)$ بوضع $z = f(x, y)$ نحصل على

$$\phi(x, f(x, y)) = y$$

$$i.e., \quad g(x, y) = F(f(x, y)).$$

يمكن إبطال الشرط (3) في النظرية السابقة بالشرط $f_x(x_0, y_0) \neq 0$ مع إستبدال حل المعادلة الضمنية في x بدلا من y .

عندما يكون عدد الدوال أقل من عدد المتغيرات يجب التحقق من إنعدام كل جاكوبيان ممكنة. مثلا في حالة لربط دالتين في ثلاث متغيرات $u(x, y, z), v(x, y, z)$ داليا إى الإفتراض بأن $F(u, v) = 0$ يؤدي إلى المعادلات

$$\frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

وباعتبار هذه المعادلات متى نحصل عليه

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 0, \quad \frac{\partial(u, v)}{\partial(y, z)} = 0, \quad \frac{\partial(u, v)}{\partial(z, x)} = 0$$

التعميم لدوال عددها m ومتغيرات عددها n لا يمثل أى صعوبة. عندما تكون $m > n$ فإن الدوال تكون دائما مرتبطة داليا.

مثلا ٢٩: إذا كانت $x^2 + y^2 + u^2 - v^2 = 0, uv + xy = 0$ أوجد جاكوبيان

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$$

بأخذ تفاضلات العلاقات المعطاه

$$x^2 + x + y \, dy + u \, du - v \, dv = 0, \quad u \, dv + v \, du + x \, dy + y \, dx = 0$$

بجاء dv نحصل على

$$u(x \, dx + y \, dy + u \, du) + v(v \, du + x \, dy + y \, dx) = 0$$

$$\text{i.e., } du = - \frac{(ux + vy) \, dx + (uy + vx) \, dy}{u^2 + v^2}$$

بجاء du نحصل على

$$dv = \frac{(vx - uy) \, dx + (vy - ux) \, dy}{u^2 + v^2}$$

حيث أن جميع التفاضلات هي تفاضلات تامة، من ثم يمكننا أن نطبق المعادلات كمشتقات. على سبيل المثال

$$\frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{ux + vy}{u^2 + v^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{vy - ux}{u^2 + v^2}$$

جاكوبيان التحويل

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{u^2 + v^2} \begin{vmatrix} -(ux + vy) & -(vx + uy) \\ vx - uy & vy - ux \end{vmatrix} = \frac{x^2 - y^2}{u^2 + v^2}$$

مثال ٣٠: لإيضاح ما إذا كانت الدوال

$$u = \frac{x-y}{x+z}, \quad v = \frac{x+z}{y+z}$$

مرتبطة داليا أم لا، نعتبر

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{z+y}{(x+z)^2} & \frac{-1}{x+z} \\ \frac{1}{y+z} & -\frac{x+z}{(y+z)^2} \end{vmatrix} = 0$$

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, z)} = \begin{vmatrix} \frac{z+y}{(x+z)^2} & -\frac{x-y}{(x+z)^2} \\ \frac{1}{y+z} & \frac{y-x}{(y+z)^2} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(y, z)} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{x+z} & -\frac{x-y}{(x+z)^2} \\ -\frac{x+z}{(y+z)^2} & \frac{y-x}{(y+z)^2} \end{vmatrix} = 0$$

أى أن الدالتين مرتبطتان دالياً.

مثال ٣١: لإثبات أن الدوال $u=y+z, v=x+2z^2, \omega=x-4yz-2y^2$

مرتبطة دالياً وإيجاد العلاقة الدالية التى تربطها. نعتبر

$$\frac{\partial(u, v, \omega)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4z \\ 1 & -4z-4y & -4y \end{vmatrix} = -[-4y-4z] + [-4z-4y] = 0$$

أى أن الدوال مرتبطة دالياً . يمكن إيجاد الارتباط الدالى بين هذه الدوال

$$\omega = x - 2(y^2 + 2yz) = x - 2[(y+z)^2 - z^2] \quad \text{كالتى:}$$

$$= x - 2u^2 + 2z^2 = v - 2u^2$$

تمارين ٣

١ - إذا كانت $x+y=u$, $y=uv$ فثبت أن $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = u$

٢ - إذا كانت $x=u(1+v)$, $y=v(1+u)$ فثبت أن $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1+u+v$

٣ - إذا كانت $x+y+z=u$, $y+z=uv$, $z=uv\omega$ فثبت أن

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,\omega)} = u^2v$$

٤ - إذا كان $ux=v^2+y$, $vy=x^2+2u^2$ تعرف u,v كدوال من x,y فثبت

أن $u_x = (uy-4xv) / (8uv-xy)$, $v_x = (4u^2-2x^2) / (8uv-xy)$

٥ - إذا ارتبطت المتغيرات x,y,z بالعلاقات $f(x,y,z)=0$, $x^2+y^2+z^2=c$ فثبت أن

$$\frac{dy}{dx} = -(zf_x - xf_z) / (zf_y - yf_z)$$

٦ - إذا كانت $x = (au+bv) / (u^2+v^2)$, $y = \frac{bu-av}{u^2+v^2}$ فثبت أن

$$v \frac{dx}{du} - u \frac{dx}{dv} = -y$$

٧ - فثبت أن معادلة المماس للمنحنى $f(x,y)=c$ عند نقطة (x_0, y_0) هي

$$0 = (x-x_0) f_x(x_0, y_0) + (y-y_0) f_y(x_0, y_0)$$

٨ - إذا كانت

$$u = \frac{x+y}{y} , \quad v = \frac{x-y}{x}$$

فثبت أن $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 0$ ولوجد العلاقة بين u, v .

٩ - أثبت أن الدوال

$$u = x + y + z, \quad v = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx,$$

$$w = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

مرتبطة داليا ولوجد العلاقة بينها.

١٠ - لوجد $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ إذا كانت $\frac{v}{u} - \tan y = 0$, $u^2 + v^2 - x^2 = 0$

١١ - إذا كانت $x = r \sin \theta \cos \phi$, $y = r \sin \theta \sin \phi$, $z = r \cos \theta$ أثبت أن

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = r^2 \sin \theta$$

١٢ - لوجد قيمة الثابت k حتى تصبح الدوال

$$u = kx^2 + 4y^2 + z^2, \quad v = 3x + 2y + z, \quad w = 2yz + 3zx + 6xy$$

مرتبطة داليا. نقيمة k هذه لوجد العلاقة بين u, v, w

لوجد قيمة k حتى تصبح الدوال الأتية مرتبطة داليا

$$u = \cos x \cos y - k \sin x \sin y \quad v = \sin x \cos y + k \cos x \sin y$$

١٣ - إذا كانت $x = \cos \theta - r \sin \theta$, $y = \sin \theta + r \cos \theta$

أثبت أن

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -(\cos \theta) / x \quad \frac{\partial r}{\partial x} = x / r$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\cos \theta}{r^3} (\cos \theta - 2r \sin \theta).$$

١٤ - إذا كانت $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$ فثبت أن

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u}{2(u^2 + v^2)} , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{v}{2(u^2 + v^2)}$$

١٥ - إذا كانت $f(x, y, u, v) = 0$, $g(x, y, u, v) = 0$ فثبت أن

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial v} = 0$$

١٧-٥ المشتقات الاتجاهية (Directional derivatives)

نفرض أن $u = u(P)$ دالة موضع قيمية من موضع P معرفة في

منطقة R . نقول أن $u(P)$ متصلة عند نقطة P إذا كان $\lim_{P' \rightarrow P} u(P') = u(P)$.
الدوال المتصلة عند كل نقط المنطقة يقال أنها متصلة في R .

نعتبر دالة $u(P)$ متصلة في منطقة R . نختار نقطة O من نقط

المنطقة ونعتبرها نقطة أصل لمتجهات الموضع $\vec{OP} = r$ نفرض P' نقطة ما في جوار النقطة P متجه موضعها $r' = r + \Delta r$ النسبة

$$\frac{u(P') - u(P)}{|\Delta r|} = \frac{u(P') - u(P)}{\Delta s}$$

تعطى معدلا تقريبا لتغيير الدالة $u(P)$ في اتجاه Δr . بقترب P' من P بحيث يظل Δr موازيا لمتجه وحدة ثابت t فإن هذه النهاية (إن كان لها وجود)

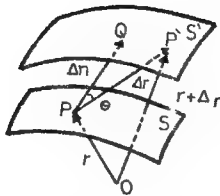
$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{u(P') - u(P)}{\Delta s} = \frac{du}{ds}$$

تسمى معدل تغير u في اتجاه t أو المشتقة الاتجاهية للدالة u في الاتجاه المعروف بالمتجه t . إذا كانت جميع المشتقات du/ds عند نقطة P متصلة نقول أن $u(P)$ متصلة الاشتقاق (continuously differentiable) عند P .
يمكن تعريف المشتقة الاتجاهية عند نقطة P في اتجاه متجه t بالنهاية

$$\frac{du}{ds} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{u(P + st) - u(P)}{s}$$

النقط التي تصبح عندها $u(P)$ مساوية مقدارا ثابتا $c = u(P)$ تسمى

سطح منسوب (level surface) أو سطح مقطعي للدالة .



نعتبر سطحين S, S' معرفين

بالمعلاقين $u = c, u = c + \Delta c$

حيث Δc هو تغيير صغير في c

لأى نقطة P على S وأى نقطة P'

على S' فإن الفرق

$$\Delta u = u(P') - u(P) = \Delta c$$

وهو فرق لا يتوقف على النقطة P' على S' . لكن متوسط معدل التغيير

$$\frac{u(P') - u(P)}{|\Delta r|} = \frac{\Delta u}{\Delta s}$$

يتوقف على قيمة Δr نهائية النسبة عندما يقترب Δr من الصفر بجعل

Δc يقترب من الصفر هي المشتقة الاتجاهية في الاتجاه الثابت المعروف

بالمتجه $\Delta r = kt$. أكبر معدل تغير للدالة u سوف يحدث عندما يكون

المقام $|\Delta r|$ في أصغر قيمة وهذا يحدث عندما تكون PP' في اتجاه

العمودى n على السطح عند P .

$$\Delta n = \Delta r \cos \theta$$

حقيقة

حيث θ هي الزاوية بين العمودى n على السطح والمتجه Δr

$$\frac{du}{dn} = \lim_{|\Delta n| \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{|\Delta n|} = \lim_{|\Delta r| \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{|\Delta r| \cos \theta} = \sec \theta \frac{du}{ds} \rightarrow \frac{du}{ds} = \cos \theta \frac{du}{dn}$$

المشتقة du/dn في اتجاه العمودى على السطح $u = \text{const.}$ تسمى المشتقة

العمودية للدالة $u(p)$.

إذا كان n هو متجه وحدة عمودى على السطح عند P مشيراً في

الاتجاه الذى فيه $\Delta u > 0$ فلنا يمكن أن ننشأ متجهاً يسمى متجه إنحدار u

والذى يرمز به بالرمز ∇u أو $\text{grad } u$ كالأتى

$$\text{grad } u = \nabla u = n \frac{du}{dn}$$

هذا المتجه يمثل بالإتجاه والقيمة أكبر معدل تغير للدالة شرط ألا
 ينعدم du / dn من الواضح أن متجه الإتحدار لا يتوقف في نظام
 للإحداثيات وبالتالي فهو لامتغير (invariant)
 إذا اعتبرنا نظام الإحداثيات الكارتيزية، يمكن أن نكتب

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z + e_1 \Delta x + e_2 \Delta y + e_3 \Delta z$$

حيث e_1, e_2, e_3 تقترب من الصفر بإقتراب $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ من
 الصفر. بالقسمة على $\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$ وإقترب Δs من
 الصفر نحصل على

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{ds}$$

حيث

$$\frac{dx}{ds} = \cos(\vec{x} \cdot \vec{s}) , \quad \frac{dy}{ds} = \cos(\vec{y} \cdot \vec{s}) , \quad \frac{dz}{ds} = \cos(\vec{z} \cdot \vec{s})$$

هي جيب تمام إتجاه متجه الوحدة \vec{s} المنطبق على المتجه $\Delta \vec{r}$ من متجه
 الموضع للنقطة P

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

يمكن أن نكتب

$$\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{dx}{ds} \vec{i} + \frac{dy}{ds} \vec{j} + \frac{dz}{ds} \vec{k}$$

ومن ثم

$$\frac{du}{ds} = \nabla u \cdot \vec{t}$$

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}$$

الصيغة السابقة تقود إلى تعريف مؤثر اتجاهي تفاضلي ∇ يسمى

مؤثر دل أو نبلا (del or napla operator)

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

مثل المؤثر التفاضلي $D \equiv d/dx$ فإن المؤثر نبلا له الخواص الآتية

$$\nabla(u+v) = \nabla u + \nabla v$$

$$\nabla(uv) = u \nabla v + v \nabla u$$

مثال ٥٩: لإيجاد المشتقة الاتجاهية للدالة $u = x^2y - y^2z - xyz$ عند النقطة

$$\mathbf{t} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k} \text{ في اتجاه المتجه } (1, -1, 0)$$

$$\nabla u = (2xy - yz) \mathbf{i} + (x^2 - 2yz - xz) \mathbf{j} + (-y^2 - xy) \mathbf{k}$$

$$(\nabla u)_{(1, -1, 0)} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla u \cdot \mathbf{t} = (-2\mathbf{i} + \mathbf{j}) \cdot \frac{\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{\sqrt{6}} = \frac{-2-1}{\sqrt{6}} = -\sqrt{3/2}$$

مثال ٦٠: إذا كانت الدوال الآتية متصلة الإشتقاق

$$f = f(u, v, \omega), \quad u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z), \quad \omega = \omega(x, y, z)$$

فإن

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial u} \nabla u + \frac{\partial f}{\partial v} \nabla v + \frac{\partial f}{\partial \omega} \nabla \omega$$

حقيقة

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) i -$$

$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) j$$

$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) k$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k \right) + \dots$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u} \nabla u + \frac{\partial f}{\partial v} \nabla v + \frac{\partial f}{\partial \omega} \nabla \omega$$

١٧-١-٥ المعنى الهندسى لمتجه الإحداثى

نفرض أن لدالة الموضع $u = \phi(x, y, z)$ مشتقات جزئية

أولى بالنسبة إلى x, y, z وأن $r = xi + yj + zk$ هو متجه موضع نقطة

$P(x, y, z)$ إذا تحركت P إلى نقطة مجاورة $Q(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$

وكان $\Delta s = |PQ| = |\Delta r|$

فإن المتجه

$$\frac{dr}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta s} = \frac{dx}{ds} i + \frac{dy}{ds} j + \frac{dz}{ds} k$$

يمثل متجه وحدة فى اتجاه التغير PQ عند النقطة P . معدل تغير الدالة ϕ

فى اتجاه PQ يساوى

$$\frac{d\phi}{ds} = \nabla \phi \cdot \frac{dr}{ds}$$

إذا اعتبرنا سطحاً $\phi(x, y, z) = \text{const. } c$ وكانت P نقطة على السطح فإن

$$\frac{d\phi}{ds}=0 = \text{grad}\phi \cdot \frac{dr}{ds}$$

حيث أن المتجه dr/ds يمثل متجه وحدة مماس للسطح $\phi(x,y,z)=c$ عند

النقطة P من ثم فإن $\nabla\phi$ يمثل متجهها عموديا على السطح عند النقطة P .

مثال ٦١: إثبت أن المستوى $lx+my+nz=p$ يمس السطح الناقصى

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1 \quad \text{إذا كان} \quad a^2l^2 + b^2m^2 + c^2n^2 = p^2$$

نكتب معادلة السطح الناقصى على الهيئة

$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

نفرض أن المستوى يمس السطح الناقصى وأن نقطة التماس هي

$$P(x_0, y_0, z_0) \text{ من ثم}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_P = \frac{2x_0}{a^2}, \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_P = \frac{2y_0}{b^2}, \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_P = \frac{2z_0}{c^2}$$

معادلة المستوى المماس

$$(x-x_0) \frac{2x_0}{a^2} + (y-y_0) \frac{2y_0}{b^2} + (z-z_0) \frac{2z_0}{c^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1$$

وهذه تمثل نفس المعادلة $lx+my+nz=p$ بالتالى

$$\frac{x_0}{a^2l} = \frac{y_0}{b^2m} = \frac{z_0}{c^2n} = \frac{1}{p}$$

$$x_0 = \frac{a^2l}{p}, \quad y_0 = \frac{b^2m}{p}, \quad z_0 = \frac{c^2n}{p}$$

ولكن (x_0, y_0, z_0) تحقق معادلة السطح الناقصى، من ثم

$$a^2l^2 + b^2m^2 + c^2n^2 = p^2$$

تمارين ٤

١ - إذا كانت $u = \ln(x^2 + 3u)$ أوجد du/dx

٢ - إذا كانت $\ln uy + u \ln u = x$ أوجد

$$\frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

٣ - أوجد $\frac{\partial u}{\partial x}$ إذا كانت $x^2 + u^2 = f(x, u) + g(x, y, u)$

٤ - إذا كانت $u = f(x + u, yu)$ أوجد

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial x}$$

٥ - إذا كانت $x = u^2 + v^2, y = u^2 - v^2$ فابحث أن

$$\frac{\partial x}{\partial u} \Big|_v \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_y = \frac{1}{2}$$

٦ - أوجد du إذا كانت $y = 2u - v, x = u + 3v$

٧ - أوجد $dz - dz$ إذا كانت $z = x^2 y^2$

٨ - أوجد مشتقة u بالنسبة إلى x من

$$xu + uv = u - x, v^2 + xv = u + x$$

٩ - إذا كانت $(x, y) = f(u, v) = (uv, u^2 + v^2)$ أوجد $\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y}$

عند $f(1, 2)$.

١٠ - إذا كانت $(u, v, \omega) = f(x, y, z)$ معرفة ضمناً بالعلاقات

$$xu - 3xv + \omega^2 = -3, uz^2 - 3v\omega + vy = 1, xy\omega^2 - 2uv + xz^2 = 1$$

أوجد $\frac{\partial u}{\partial y}(0, 1, -1)$

١١ - إثبت أن مجموع مقاطع المستوى المماس للسطح $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$

عند أى نقطة عليه مع محاور الإحداثيات يساوى مقدار ثابت.

١٢- أوجد نَقط السطح $x^2+xy-xz+yz=16$ التى يكون العمودى

عندما موازيا المتجه $u=2\hat{i}+\hat{j}+4\hat{k}$

١٣- أوجد معادلة المستوى المماس ومعادلته العمودى للسطح

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}$$

عند النقطة (x_0, y_0, z_0)

١٤ - هل $\frac{\partial u}{\partial x}$ تساوى مقلوب $\frac{\partial x}{\partial u}$ فى

(أ) العلاقة $f(x, y, u)=0$

(ب) العلاقتان $f(x, y, u, v)=0$, $g(x, y, u, v)=0$

١٥ - أوجد u, v صراحة من التحويل، $u^2+v^2=4xy$, $uv=2xy-2y^2$

أوجد جميع النقط $(x, y)=(-1, -1)$. (حسب $\frac{\partial u}{\partial x}$ عند

$(-1, -1)$ مرة من الدالة الضمنية ومرة أخرى من الدالة الصريحة.

١٦ - أوجد $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ من العلاقتان $xy-zu=2$, $x^2+y^2+z^2+u^2=1$

١٧ - أوجد $\frac{du}{dx}$ إذا كانت

$$f(u, v, \omega)=x^2, g(u, v, \omega)=\ln \omega, h(u, v, \omega, x)=0$$

١٨ - إذا كانت $v=re^x+xe^x$ حيث $r^2=x^2+y^2$ فإثبت أن

$$a) yv_x-xv_y=y(re^x+e^x)$$

$$b) xv_x+yv_y=v+xr(e^x+e^x)$$

١٩ - إذا كانت $z=z(x, y)$ وكانت $v=y$, $u=x^2-y^2-2xy$

حول المعادلة $(x+y)z_x+(x-y)z_y=0$ إلى معادلة بدلالة u, v

٢٠ - أثبت أن $dg(f(x, y, z)) = g' df$

٢١ - إذا كانت $f(x, y) = xy + y \ln x$ أوجد ∇f عند $(1, 2)$

أى المتجهات الآتية متجه إحدادر دالة f ، وإذا كن الأمر كذلك
أوجد هذه الدالة

$$(i) (zx+ y) i + (zy+ x+ z) j + (y- 2z) k$$

$$(ii) (3x^2y^2z) i + x^3y^2z j + x^3y^2 k$$

٢٢ - إذا كانت $u = f(x)$, $v = g(u)$, $x = \phi(r, s)$, $y = \psi(r, s)$

فأثبت أن

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(r, s)} = f' g' \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, s)}$$

٢٣ - إذا كانت

$$x = r \cos \theta \cos \phi , y = r \sin \theta \cos \phi , z = r \sin \theta$$

فأثبت أن

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = r^2 \cos \phi$$

أوجد كذلك جاكوبيان التحويل إلى إحداثيات إسطوانية

$$x = r \cos \theta , y = r \sin \theta , z = z$$

٢٤ - إذا كانت u, v, w دوال من x, y, z فثبت أن

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial(v, w)}{\partial(y, z)} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial(w, u)}{\partial(y, z)} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial(u, v)}{\partial(y, z)}$$

٢٥ - فى السؤال السابق أثبت أن

$$\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial(v, w)}{\partial(y, z)} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial(w, u)}{\partial(y, z)} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial(u, v)}{\partial(y, z)} = 0$$

٢٦ - إذا كانت $u = x + y - z, v = x - y + z, w = z + 2y + z$

أوجد التحويل العكسي وأوجد جاكوبيان كل تحويل

٢٧ - إذا كانت

$$J = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

جاكوبيان تحويل ما. أو جاكوبيان تحويله العكسي.

٢٨ - إذا كانت $u = 2xy, v = x^2 - y^2, x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$

أحذف x, y ثم احسب $\partial(u, v) / \partial(r, \theta)$ وحقّق النتائج بإيجاد

جاكوبيان كل تحويل.

٢٩ - إذا كانت

$$u = \frac{x+y}{z}, v = \frac{y+z}{x}, w = \frac{y(x+y+z)}{xz}$$

إثبت أن $\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = 0$ ثم أوجد العلاقة الدالية التي تربطها.

١٨-٥ تعميم مفكوك تايلور

سوف ندرس تعميم مفكوك تايلور لدالة أكثر من متغير وعلى وجه الخصوص لدالة متغيرين اعتماداً على مفكوك تايلور لدالة المتغير الواحد. لتعميم مفكوك تايلور لدالة متغيرين يجب أن نحصل على المشتقات المتعاقبة للدالة.

$$F(t) = f(a+ht, b+kt)$$

$$F'(0) = h \frac{\partial}{\partial a} f(a, b) + k \frac{\partial}{\partial b} f(a, b)$$

$$F''(0) = h^2 \frac{\partial^2}{\partial a^2} f(a, b) + 2hk \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial a \partial b} + k^2 \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial b^2}$$

يمكن بسهولة باستخدام مبدأ الاستنتاج الرياضى أن نثبت أن

$$F^{(n)}(0) = \sum_{j=0}^n n C_j h^j k^{n-j} \frac{\partial^n}{\partial a^j \partial b^{n-j}} f(a, b) \quad j=0, 1, 2, \dots, n.$$

بسبب التشابه بين صيغة الجمع السابقة ومفكوك ذات الحدين نقدم الصيغة الرمزية التالية

$$F^n(0) = \left(h \frac{\partial}{\partial a} + k \frac{\partial}{\partial b} \right)^n f(a, b)$$

نظرية:

إذا كانت: $f(x, y) \in C^{n+1}$ فى المنطقة $|x-a| \leq |h|, |y-b| \leq |k|$

فان

$$f(a+h, b+k) = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} \left(h \frac{\partial}{\partial a} + k \frac{\partial}{\partial b} \right)^j f(a, b) + R_n$$

حيث

$$R_n = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial a} + k \frac{\partial}{\partial b} \right)^{n+1} f(a+ht, b+kt) dt$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \left(h \frac{\partial}{\partial a} + k \frac{\partial}{\partial b} \right)^{n+1} f(a+\theta h, b+\theta k) \quad 0 < \theta < 1$$

لإثبات هذه الصيغة نقوم بفك الدالة $F(t)$ على هيئة متسلسلة تيلور

$$F(t) = \sum_{j=0}^n \frac{F^{(j)}(d)}{j!} (t-d)^j + \int_d^t F^{(n+1)}(u) \frac{(t-u)^n}{n!} du$$

بوضع $d=0, t=1$ نحصل على

$$F(1) = \sum_{j=0}^n \frac{F^{(j)}(0)}{j!} + \int_0^1 F^{(n+1)}(u) \frac{(1-u)^n}{n!} du$$

$$= \sum_{j=0}^n \frac{F^{(j)}(0)}{j!} + \frac{F^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} \quad 0 < \theta < 1$$

باستبدال $F^{(j)}(0)$ بصيغتها الرمزية نحصل على النتيجة المطلوبة.

يمكن أن نحصل على صيغة مفيدة أخرى بوضع x بدلا من $a+h$ وبوضع y بدلا من $b+k$

$$f(x, y) = \sum \frac{1}{j!} \left| (x-a) \frac{\partial}{\partial a} + (y-b) \frac{\partial}{\partial b} \right|^j f(a, b) + R_n$$

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} \left| (x-a) \frac{\partial}{\partial u} + (y-b) \frac{\partial}{\partial v} \right|^{n+1} f(u, v)$$

حيث وضعنا بعد التفاضل

$$u = a + \theta(x-a), \quad v = b + \theta(y-b), \quad 0 < \theta < 1$$

يمكن كذلك كتابة مفكوك تيلور رمزياً (أو بصيغة مؤثرات) كالآتي:

$$f(x+h, y+k) = e^{hD_x + kD_y} f(x, y)$$

$$f(x, y) = e^{(x-a)D_x + (y-b)D_y} [f(x, y)]_{(a, b)}$$

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x}, D_y = \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{حيث}$$

$$f(x, y), g(x, y) \in C^1, \quad \text{مثال ٦٢: إذا كان}$$

$$f(0, 0) = g(0, 0) = 0, \quad g_x(0, 0) + g_y(0, 0) \neq 0$$

فلوجد $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) / g(x, y)$ عندما تقرب (x, y) من $(0, 0)$ على المستقيم $y = \lambda x$

$$\frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{f(0, 0) + x f_x(\theta_1 x, \theta_1 y) + y f_y(\theta_1 x, \theta_1 y)}{f(0, 0) + x g_x(\theta_1 x, \theta_1 y) + y g_y(\theta_1 x, \theta_1 y)} \quad 0 < \theta_1 < 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{f_x(0, 0) + \lambda f_y(0, 0)}{g_x(0, 0) + \lambda g_y(0, 0)}$$

مثال ٦٣: منكتب صراحة جميع حدود التعبير الرمزي

$$E = [(x-1) \frac{\partial}{\partial a} + y \frac{\partial}{\partial b}]^3 f(a+t, b)$$

$$E = [(x-1)^3 \frac{\partial^3}{\partial a^3} + 3(x-1)^2 y \frac{\partial^3}{\partial a^2 \partial b} +$$

$$+ 3(x-1) y^2 \frac{\partial^3}{\partial a \partial b^2} + y^3 \frac{\partial^3}{\partial b^3}] f(a+t, b)$$

$$= (x-1)^3 f_{aaa} + 3(x-1)^2 y f_{aab} + 3(x-1) y^2 f_{abb} + y^3 f_{bbb}$$

تسمى دالة $F(x, y)$ متجانسة من الدرجة n في منطقة R إذا وفقط إذا كان

لاى $(x, y) \in R$ ولاى عدد موجب t

$$F(tx, ty) = t^n F(x, y)$$

من أمثلة للدوال المتجانسة: الدالة $f(x, y) = x \cdot y^{-4/3} \tan^{-1} \frac{y}{x}$

متجانسة من الدرجة $n = -1$

الدالة: $g(x, y) = 3 + \ln \frac{y}{x}$ متجانسة من الدرجة صفر في الربع

الأول أو الثالث

مثال ٦٤:

نثبت أنه لأي دالة متجانسة من الدرجة n متصلة المشتقات الأولى فإن

$$(i) \quad x f_x(x, y) + y f_y(x, y) = n f(x, y)$$

$$(ii) \quad x^2 f_{xx}(x, y) + 2xy f_{xy}(x, y) + y^2 f_{yy}(x, y) = n(n-1) f(x, y)$$

حقيقة

$$f(ux, uy) = u^n f(x, y)$$

بوضع $1+t$ بدلا من u

$$f(x+tx, y+ty) = (1+t)^n f(x, y)$$

لإيجاد مفكوك تيلور في الطرف الأيسر ومفكوك ذات الحدين في الطرف

الأيمن ومساواة معاملات قوى t المتكافئة نحصل على المطلوب، أعني

$$f(x+tx, y+ty) = f(x, y) + t(xf_x + yf_y) +$$

$$\frac{t^2}{2!} [x^2 f_{xx} + 2xy f_{xy} + y^2 f_{yy}] + \dots$$

$$= [1 + nt + \frac{n(n-1)}{2!} t^2 + \dots] f(x, y)$$

مثال ٦٥:

لإيجاد حتى حدود الدرجة الثالثة مفكوك

$$z = \ln(3 + x^2 + 2y)$$

في جوار $(1, -1)$

نحسب أولاً للمشتقات الجزئية

$$z(1, -1) = \ln 2$$

$$z_x = \frac{2x}{3+x^2+2y}$$

$$z_x(1, -1) = \frac{2}{2} = 1$$

$$z_y = \frac{2}{3+x^2+2y}$$

$$z_y(1, -1) = 1$$

$$z_{xx} = \frac{6-2x^2+4y}{(3+x^2+2y)^2}$$

$$z_{xx}(1, -1) = 0$$

$$z_{xy} = -\frac{4x}{(3+x^2+2y)^2}$$

$$z_{xy}(1, -1) = -1$$

$$z_{yy} = -\frac{4}{(3+x^2+2y)^2}$$

$$z_{yy}(1, -1) = -1$$

$$\ln(3+x^2+2y) = \ln 2 + [(x-1) + (y+1)]$$

$$+ \frac{1}{2!} [-2(x-1)(y+1) - (y+1)^2] + \dots$$

تمارين ٥

١ - أكتب صراحة جميع حدود التعبير الترميزية

(a) $(1 + \frac{d}{dx})^3 \sin x$ at $x = \pi/2$

(b) $(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y})^3 xy^2$

٢ - أوجد جميع حدود مفكوك تيلور في جولر $(2, -1)$ للدالة $x^2 y - y^3$

٣ - أوجد مفكوك $x^2 y + \sin y + e^x$ في قوى $(y - \pi)$, $(x - 1)$ حتى حدود

الدرجة الثالثة وأكتب الباقي. لاحظ 0

٤ - عبر عن الدالة $x^2 y^2$ في قوى $(x - 1)$, $(y + 1)$ ،

٥ - أوجد حتى حدود الدرجة الثانية مفكوك $\sin(x + \log y)$ في جولر

$$(0, 1)$$

٦ - أوجد مفكوك $(1 - 3x + 2y)^3$

(أ) في قوى x, y ،

(ب) في قوى $(x - 1)$, $(y + 1)$ مع مراجعة الناتج جبرياً.

٧ - استخدم مفكوك مكلورين لإيجاد النهايات الآتية عندما تقترب (x, y)

من $(0, 0)$ على المستقيم $y = ax$

$$\lim \frac{\sin xy + xe^{x-y}}{x \cos y + \sin 2y} , \lim \frac{e^{xy} - 1}{\sin x \ln(1+y)}$$

٨ - أوجد ستة حدود من مفكوك $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y+4}$ في قوى

$$(x+2), (y-1)$$

٩ - أوجد مفكوك الدوال الآتية حول النقطة قرين كل من

$$(i) \frac{8}{2-3x+5y} \quad (0,0) \quad (ii) \cos(x^y) \quad (\pi,1)$$

$$(iii) x^{\sin y} \quad (1,0)$$

٩. أوجد ستة حدود من مفكوك الدالة $\frac{x-y}{x+y+1}$ في جوار $(2,-1)$

١٠. أوجد مفكوك $\frac{1+xy}{1-xy}$ في جوار (i) النقطة $(0,0)$ ، (ii) النقطة

$(2,1)$

١١. أوجد مفكوك $\ln \frac{x+y}{x-y}$ في جوار $(1,0)$

١٢. أوجد مفكوك $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ في قوى $(x-2), (y-1)$

١٣. أوجد تقريباً من الدرجة الثانية حول $(0,0)$ للدوال

$$(i) f(x,y) = \frac{1}{(2+x)(2-y)}, \quad (ii) \tan^{-1} \frac{x+y}{1-xy},$$

من ثم أوجد الخطأ في هذا التقريب عند $y = 0.8$ و $x = 0.2$

١٤. أوجد تقريباً من الدرجة الثانية يصلح لحساب $f(1.1, 2.1)$ للدالة

$$f(x,y) = \frac{1+x+y}{1+x^2+y^2}$$

١٩-٥ تطبيقات التفاضل الجزئى

النهايات العظمى والصغرى المحلية (دالة متغيرين)

النهايات العظمى والصغرى المطلقة

(Absolute maximum or minimum)

تعريف:

يقال أن الدالة $f(x, y)$ نهاية عظمى مطلقة عند نقطة (x, y) فى منطقة R إذا كان $f(x, y) > f(X, Y)$ لجميع النقط (X, Y) فى R .

تعريف:

يقال أن الدالة $f(x, y)$ نهاية عظمى نسبية أو محلية عند نقطة (x, y) من منطقة R \iff يوجد عدد موجب δ بحيث $f(x, y) > f(X, Y)$ لجميع النقط (X, Y) من R بحيث

$$0 < (x - X)^2 + (y - Y)^2 < \delta$$

أى إذا وجد جوار للنقطة (X, Y) تكون فيه قيمة الدالة عدد (X, Y) أكبر من جميع قيمها عند نقط هذا الجوار.

تعرف النهايات الصغرى المطلقة والنسبية بتعديل واضح فى التعريفين السابقين.

سوف نستخدم مفكوك تيلور للحصول على الشروط التى بموجبها يكون لدالة $z = f(x, y)$ نهاية عظمى أو صغرى محلية $z_0 = f(a, b)$ عند نقطة (a, b) من مفكوك تيلور

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + hf_x(a, b) + kf_y(a, b) + o(h^2, k^2)$$

حيث h, k مقلابر إختيارية بينما $o(h^2, k^2)$ تعنى مقدار من الدرجة الثانية فى كل من h, k

التغير Δz في z

$$z - z_0 = \Delta z = f(a+h, b+k) - f(a, b)$$

$$= hf_x(a, b) + kf_y(a, b) + o(h^2, k^2)$$

نضع أولاً $k=0$ ليصبح الحد المسند (من الدرجة الأولى في التغير) في Δz

$$\Delta z = hf_x(a, b) + o(h^2)$$

هو $hf_x(a, b)$ وهذا المقدار يغير إشارته إذا تغيرت إشارة h وعليه لكي

تحتفظ Δz بإشارة ثابتة عند النهايات المحلية وجب إنعدام $f_x(a, b)$ بالمثل

مع $f_y(a, b)$

أي أن الشرط اللازم كي تبقى إشارة Δz ثابتة هو إنعدام

$f_x(a, b)$, $f_y(a, b)$ (شرط إنعدام $f_x = 0 = f_y$ يكافئ كون المستوى

المماس عند (a, b) عمودياً على محور z)

النقط التي تعتمد عندها f_x , f_y تسمى نقاط الثبات

(Stationary points)

بافتراض إنعدام f_x , f_y يصبح المحصر المسند في إشارة Δz هو

الحد التالي من مفكوك تيلور.

$$\Delta z = \frac{1}{2!} \{h^2 f_{xx}(a, b) + 2hkf_{xy}(a, b) + k^2 f_{yy}(a, b)\} + o(h^3, k^3)$$

الحد المسند في هذه الحالة هو دالة متجانسة من الدرجة الثانية في h, k .

تكون لقيم كثيرة حدود من الدرجة الثانية إشارة ثابتة إذا كان مميزها

سالباً، أي إذا كان

$$[f_{xy}(a, b)]^2 < f_{xx}(a, b) \cdot f_{yy}(a, b)$$

(والتي تتحقق إذا كانت كثيرة الحدود في h, k صيغة تربيعية محددة

(definite quadratic form)

لكى تكون z_0 نهاية عظمى محلية يجب أن يقى Δz سالبة لجميع قيم (h, k) بحيث $|h| \leq \delta, |k| \leq \delta$ لعدد موجب δ . بالتالى يجب أن يكون أول حد $f_{xx}(a, b)$ سالبا (تكون f_{yy} سالبة أيضا) نوجز ما سبق فيما يلى:

الشروط الكافية لكى تكون $z_0 = f(a, b)$ نهاية عظمى محلية للدالة

$f(x, y)$ هى

$$f_x(a, b) = 0 = f_y(a, b), \quad \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} > 0, \quad f_{xx} < 0, \quad f_{yy} < 0$$

أى يجب أن تكون الصيغة التربيعية لحدود الدرجة الثانية من مفكوك تيلور سالبة يقينا (negative definite)

قد يحدث أن تنعدم حدود الدرجة الثانية جميعا عند (a, b) . لكى تكون (a, b) نقطة نهاية عظمى فإن المشتقات الغير منعمة يجب أن تكون زوجية الرتب وأن تكون صيغة سالبة يقينا (negative definitie form) الشروط الكافية لنهاية صفرى محلية عند a, b هى

$$f_x(a, b) = 0 = f_y(a, b)$$

$$[f_{xy}(a, b)]^2 < f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b)$$

$$f_{xx}(a, b) > 0, \quad f_{yy}(a, b) > 0$$

إذا كانت $u = f(x, y, z, \dots)$ فإن الشروط الكافية لكى يكون لها نهاية محلية $u_0 = f(a, b, c, \dots)$ هى:

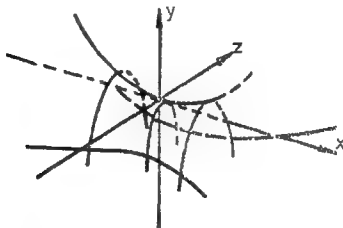
$$\nabla f = 0, \quad \text{i.e., } f_x(a, b, c, \dots) = 0 \quad (1)$$

$$= 0, \quad f_y(a, b, c, \dots) = 0, \quad f_z(a, b, c, \dots) = 0, \dots \text{etc.}$$

(ب) حدود الدرجة الثانية من مفكوك تيلور تكون صيغة محددة

(موجبة أو سالبة يقينا) فى المتغيرات (h, k, \dots)

ج) فى حالة النهاية الصغرى تكون حدود الدرجة الثانية من مفكوك
تتلور صيغة موجبة يقينا وفى حالة النهاية العظمى سالبه يقينا.



إذا كانت $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$ (أى إذا كانت المصفوفة التربيعية غير
محددة Indefinite) فإن Δz تكون موجبة لبعض قيم k , h وسالبة لقيم
أخرى. فى هذه الحالة تسمى النقطة (a, b) نقطة برذعة (Saddle point).
مثال ٦٤: لإيجاد النهايات المحلية للسطح

$$f(x, y) = x^4 - y^4 - 2(x^2 - y^2)$$

$$f_x = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) , f_y = 4y(1 - y^2)$$

$$f_x = 0, f_y = 0 \Rightarrow x = 0, \pm 1 , y = 0, \pm 1$$

$$f_{xx} = 12x^2 - 4 , f_{yy} = 4 - 12y^2 , f_{xy} = 0$$

| | f_{xx} | f_{yy} | f_{xy} | $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ |
|----------|----------|----------|----------|---------------------------|
| (0, 1) | -4 | -8 | 0 | 32 |
| (0, -1) | -4 | -8 | 0 | 32 |
| (1, 0) | 8 | 4 | 0 | 32 |
| (-1, 0) | 8 | 4 | 0 | 32 |
| (0, 0) | -4 | 4 | 0 | -16 |
| (1, 1) | 8 | -8 | 0 | -64 |
| (1, -1) | 8 | -8 | 0 | -64 |
| (-1, 1) | 8 | -8 | 0 | -64 |
| (-1, -1) | 8 | -8 | 0 | -64 |

أى أن للدالة نهايات صفرى عند $(\pm 1, 0)$ وعظمى عند $(0, \pm 1)$ ونقط
بردة عند $(1, 1)$ ، $(-1, -1)$ ، $(0, 0)$

مثال ٦٥: إثبت أن للدالة $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ نهاية صفرى
عند $(0, 0, 0)$

$$f_x = 2(x - yz), f_y = 2(y - xz), f_z = 2(z - xy)$$

$$f_{xx} = f_{yy} = f_{zz} = 2, f_{xy} = -2z, f_{yz} = -2x, f_{zx} = -2y$$

عند $(0, 0, 0)$ تعتمد كل من f_x, f_y, f_z

لعتبر مصفوفة الصيغة التربيعية

$$\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

وهى صيغة تربيعية موجبة بقينا. أى أن $(0, 0, 0)$ نقطة نهاية صفرى.

٢٠-٥ نقط الثبات المشروطة (Conditional stationary points)

وجود النهايات المحلية المشروطة أو المقيدة بنفسا فقط مع دوال

أكثر من متغير. إذا كانت الدالة ذات متغيرين فإنه لا يمكن أن يوجد أكثر

من قيد واحد ولكن إذا كانت الدالة ذات n من المتغيرات فإنه يمكن أن يوجد شروط عددها لا يتعدى $(n-1)$.

لدراسة النهايات المشروطة هناك طريقتان

للطريقة المباشرة:

.. إذا كان عدد المتغيرات المستقلة n وكان هناك m من الشروط فإنه بشكل عام تبقى $n-m$ من المتغيرات مستقلة. إذا أمكن استعمال الشروط لحذف m من المتغيرات المستقلة الأصلية ألت المعادلة إلى الحالة التي سبق دراستها. عادة تكون عملية الحذف غير عملية.

نفرض أنه يراد إيجاد لقط ثبات الدالة $u = f(x,y,z,w)$ المقيدة

بالدوال

$$\phi(x,y,z,w)=0 \quad , \quad \psi(x,y,z,w)=0$$

في الطريقة المباشرة نعتبر متغيرين من الأربعة متغيران مستقلان ونقل x,y بالاشتقاق بالنسبة إلى x,y نحصل على

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y}$$

المشتقات, $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$ يمكن حذفها بالاشتقاق دالتى القيود ϕ, ψ

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0$$

من هذه المعادلات الست يمكن الحصول على قيم x, y التي بنعدم عندها $\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ وبهذا نحصل على نقط الثبات. لتمييز هذه النقط نحتاج لحساب مشتقات الرتب الثانية حيث قد تؤدي هذه الطريقة إلى حسابات معقدة. طريقة لاجرانج (طريقة المضروبوات الغير معينة *undetermined multipliers*) التي سنشرحها لاحقاً قد تؤدي إلى تبسيط هذه الحسابات والحفاظ على تماثل المتغيرات حال وجود هذا التماثل.

مثال ٦٦: إذا كانت x, y, z زوايا مثلث فثبت أن $\sin x \sin y \sin z$ يكون أكبر ما يمكن إذا كان المثلث متساوي الأضلاع.

نفرض

$$u = \sin x \sin y \sin z = \sin x \sin y \sin (\pi - x - y) = -\sin x \sin y \sin (x + y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sin y [\sin x \cos (x + y) + \cos x \sin (x + y)] = \sin y \sin (2x + y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sin x \sin (x + 2y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2 \sin y \cos (2x + y) \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 \sin x \cos (x + 2y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \sin y \cos (2x + y) + \cos y \sin (2x + y) = \sin (2x + 2y)$$

يكون المثلث متساوي الأضلاع عند $x = y = z = \pi/3$ وعندها

$$u_x = \sin \frac{\pi}{3} \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} \right) = 0 = u_y$$

$$u_{xx} = 2 \equiv \frac{\pi}{3} \cos(\pi) = -\sqrt{3} = u_{yy}$$

$$u_{xy} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$u_{xx} u_{yy} - (u_{xy})^2 = 3 - 3 = 0 > 0$$

ومن ثم فإن النهاية عظمى حيث أن $u_{xx} < 0$.

مثال ٦٧: أوجد أقصر مسافة بين النقطة $(1,0)$ والقطع المكافئ $y^2 = 4x$

مربع المسافة بين $(1,0)$ وأى نقطة على القطع تحقق

$$u = (x-1)^2 + y^2, \quad y^2 = 4x$$

لذا يجب دراسة أصغر قيمة للدالة u مقيدة بالشرط $y^2 = 4x$. بحذف y

من u

$$u = (x-1)^2 + 4x = \frac{du}{dx} = 2(x-1) + 4 = x = -1$$

لا توجد نقطة على القطع $y^2 = 4x$ فيها $x = -1$ مما يعنى عدم وجود نهاية

محلية. أصغر مسافة مطلقة من النقطة للقطع هي المسافة بين النقطة $(1,0)$

ونقطة الأصل حيث لا ينعم $\frac{du}{dx}$

٢١-٥ طريقة لاجرائح للنهائيات العظمى والصغرى المشروطة

إذا أردنا إيجاد النهايات العظمى والصغرى المحلية لدالة $f(x,y,z)$

حيث المتغيرات x,y,z مرتبطة بالعلاقة $\phi(x,y,z) = 0$ كأن ندرس أكبر أو

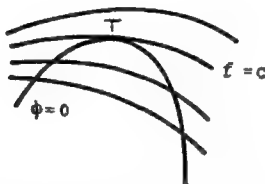
أصغر درجة حرارة t على سطح $\phi = 0$ فإن المتغيرات x, y, z لم تعد بعد

مستقلة. مثل هذه النهايات ليست أمراً جديداً، كل ما نحتاجه لمعالجة مثل

هذه الحالة هو التعبير عن أحد المتغيرات ونيكس z بدلالة المتغيرات

الأخرى. ولكن قد يكون من المناسب أن نعبر عن شروط النقط الثابتة بصورة أكثر تماثلاً دون إعطاء أفضلية لأحد المتغيرات.

كمثال بسيط ولكنه تقليدي البحث عن النهايات المحلية لدالة $f(x,y)$ والتي فيها المتغيرات x,y غير مستقلة ولكنها مرتبطة بالشرط $\phi(x,y)=0$. سنمهد هندسياً للمعالجة التحليلية. سوف نفرض أن القيد يمثل منحنى في مستوى xy بدون نقط شاذة وأن عائلة المنحنيات $f(x,y)=c$ تغطي جزءاً من المستوى. مسألتنا هي إيجاد المنحنى من العائلة $f(x,y)=c$ الذى يقطع المنحنى $\phi=0$ وتكون قيمة c فيه أكبر أو أصغر ما يمكن. عندما نتحرك على المنحنى $\phi=0$ تتغير قيمة c بانتظام ونتوقع أن نصل للنقطة حرجة.



يحدث هذا عندما يمس منحنى من العائلة $f=c$ المنحنى $\phi=0$ عند نقطة التماس T يكون للمنحنيين نفس المماس ومن ثم $f_x = f_y = \phi_x = \phi_y$ بإعتبار ثابت التناسب يساوى λ فإن

$$f_x + \lambda \phi_x = 0, \quad f_y + \lambda \phi_y = 0$$

هاتان المعادلتان بالإضافة إلى المعادلة $\phi(x,y)=0$ يقومان إحدائيات نقطة التماس بالإضافة إلى ثابت التناسب.

قد نشغل المناقشة السابقة إذا كانت النقطة T نقطة شاذة للمنحنى

$\phi=0$. على كل قد حصلنا على قاعدة تقبل التعميم وهي:

لكى يكون لدالة $f(x, y)$ نقطة حرجية (extreme value) (u, v) مع وجود القيد $\phi(x, y) = 0$ يجب وجود ثابت λ بحيث

$$f_x(u, v) + \lambda \phi_x(u, v) = 0 \quad \text{and} \quad f_y(u, v) + \lambda \phi_y(u, v) = 0$$

بالإضافة إلى $\phi(u, v) = 0$

تسمى القاعدة السابقة طريقة لاجرانج للمضروبوات غير المعينة

(Lagrange's method of undetermined multipliers)

ويسمى العامل λ مضروب لاجرانج (Lagrange's Multiplier).

تتميز طريقة معاملات لاجرانج بأنها تتعامل مع جميع المتغيرات على قدم المساواة (دون النظر لأى منها يمكن حذفه) وبالتالي فهى تحافظ على أى تماثل فى المتغيرات.

سوف نعطي الآن معالجة تحليلية لهذا النوع من المسائل بمساعدة

ليجاد النهاية الصغرى أو العظمى لدالة $u = f(x, y, z)$ مقيدة بالقيود

$$g(x, y, z) = 0, \quad h(x, y, z) = 0$$

حيث الدالتان g, h مستقلتان خطياً.

يكون للدالة f نقطة ثابتة $P(x_0, y_0, z_0)$ إذا إنجمنت حنود الدرجة الأولى من

مفكوك تبلور للمقدار f عند P أى إذا كان

$$f_x dx + f_y dy + f_z dz = 0 \quad \text{at } P \quad (1)$$

التغيرات dx, dy, dz ليست مستقلة وبذا لا نستطيع أن نستنتج لعدم $f_x, f_y,$

f_z لدينا أيضاً

$$g_x dx + g_y dy + g_z dz = 0 \quad \text{at } P \quad (2)$$

$$h_x dx + h_y dy + h_z dz = 0 \quad \text{at } P \quad (3)$$

بضرب المعادلتين (2), (3) فى ثوابت λ_1, λ_2 بالترتيب وإضافتهما

للمعادلة (1) نحصل على

$$(f_x + \lambda_1 g_x + \lambda_2 h_x) dx + (f_y + \lambda_1 g_y + \lambda_2 h_y) dy +$$

$$(-z + \lambda_1 g_z + \lambda_2 n_z) dz = 0$$

عند النقطة P يمكن اختيار λ_1, λ_2 بحيث يتعدم معاملين لتعبرين عن التغيرات dx, dy, dz لأنه إن لم يكن هذا صحيحا فإن

$$\begin{vmatrix} g_x & h_x \\ g_y & f_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_y & h_y \\ g_z & h_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_z & h_z \\ g_x & h_x \end{vmatrix} = 0$$

وبالتالى فإن g, h تكونان غير مستقلتين داليا. إذا عينا λ_1, λ_2 محققين لشروط إعدام تغيرين فإن التغير الثالث يمكن أخذه اختياريا ولذا وجب إعدام معاملة. وبالتالي نحصل على المعادلات

$$f_x + \lambda_1 g_x + \lambda_2 h_x = 0$$

$$f_y + \lambda_1 g_y + \lambda_2 h_y = 0 \quad \text{at } P \quad (4)$$

$$f_z + \lambda_1 g_z + \lambda_2 h_z = 0$$

هذه المعادلات مع معادلتى القيود $g=0, h=0$ تعطى المعادلات

اللازمة لإيجاد $x_0, y_0, z_0, \lambda_1, \lambda_2$. يمكن تذكرها بسهولة لأنها تنتج من تفاضلات الدالة المساعدة

$$\phi = f + \lambda_1 g + \lambda_2 h$$

والتي يمكن إعتبار دراستها دراسة نهائية محلية للدالة ϕ غير المقيدة.

مثال ٦٨: أوجد أكبر قيمة للدالة $f(x,y,z) = x^2 y^2 z^2$ على السطح

$$a^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

الحل: حسب قاعدة لاجرانج نعتبر الدالة

$$u = x^2 y^2 z^2 + \lambda (x^2 + y^2 + z^2 - a^2)$$

بالتفاضل نحصل على

$$2xy^2z^2 + 2\lambda x = 0, \quad 2x^2yz^2 + 2\lambda y = 0, \quad 2x^2y^2z + 2\lambda z = 0$$

الحل (0,0,0) يعطى أصغر قيمة للدالة وهي صفر. بينما الحلول
 $x^2=y^2=z^2, \lambda = -x^4$ تؤدي باستخدام القيد إلى القيم

$$x = \pm a/\sqrt{3}, y = \pm a/\sqrt{3}, z = \pm a/\sqrt{3},$$

وجميعها تعطي قيمة للدالة f تساوى $a^6/27$ وهي أكبر قيمة للدالة، ومن ثم
 يمكن أن نكتب

$$\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \leq \frac{a^2}{3} = \frac{x^2+y^2+z^2}{3}$$

أى أن الوسط الهندسى لأى ثلاث أعداد موجبة x^2, y^2, z^2 لا يتعدى وسطها
 الحسابى

مثال ٦٩: إثبت أن $xy \leq \frac{1}{a}x^a + \frac{1}{b}y^b$ لجميع قيم $x \geq 0, y \geq 0$

وجميع قيم $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ بحيث $a > 0, b > 0$

الحل: نتحقق المتباينة إذا تعمدت أى من x, y ومن ثم سنعتبر الحالة

$xy \neq 0$ حيث أن تحقق المتباينة لأى عددين x, y يستوجب تحققها

للعدين $xt^{1/a}, yt^{1/b}$ لأن

$$xy \leq \frac{1}{a}x^a + \frac{1}{b}y^b \Rightarrow xy t \leq \frac{1}{a}x^a t + \frac{1}{b}y^b t$$

$$i.e. \quad xy t^{1/a+1/b} \leq \frac{1}{a} (xt^{1/a})^a + \frac{1}{b} (yt^{1/b})^b$$

من ثم يمكن أن نكتفى بدراسة الحالة التى فيها $xy = 1$ وعليه يجب إثبات

أن $\frac{1}{a}x^a + \frac{1}{b}y^b \geq 1$ بحيث $xy=1$. بالتالى سندرس أصغر قيمة

للدالة $f = \frac{1}{a}x^a + \frac{1}{b}y^b$ المقيدة بالشرط $xy=1$. نعتبر الدالة

$$u = \frac{1}{a}x^a + \frac{1}{b}y^b + \lambda(1-xy)$$

$$u_x = x^{a-1} - \lambda y \quad , \quad u_y = y^{b-1} - \lambda x$$

عند النهايات العظمى أو الصغرى تتعدم كل من u_x , u_y وهذا يؤدي
بإستثناء الحالة $x=y=0$ إلى

$$x^a = \lambda , y^b = \lambda \Rightarrow x = y = 1$$

ومن ثم فإن أصغر قيمة للدالة $\frac{1}{a}x^a + \frac{1}{b}y^b$ يساوى $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$

$$i.e. \quad \frac{1}{a}x^a + \frac{1}{b}y^b \geq 1$$

مثال ٧٠: أوجد نقط $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ والتي عندها تكون الدالة xyz
فى حالة ثبات.

الحل: نفرض $f = xyz$, $\phi = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ نعتبر الدالة
المساعدة

$$g = f + \lambda \phi = xyz + \lambda (x^2 + y^2 + z^2 - 1) .$$

نقط ثبات f تتحدد بالمعادلات

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 , g_x = yz + 2\lambda x = 0 ,$$

$$g_y = zx + 2\lambda y = 0 , g_z = xy + 2\lambda z = 0$$

$$xg_x + yg_y + zg_z = 3xyz + 2\lambda (x^2 + y^2 + z^2) = 3xyz + 2\lambda = 0$$

$$f = -\frac{2}{3}\lambda \text{ أى أن قيم الثبات هى}$$

بحل المعادلات $g_x = g_y = g_z = 0$ نحصل على

$$g_x = yz(1 - 3x^2) = 0 , g_y = zx(1 - 3y^2) = 0 , g_z = xy(1 - 3z^2) = 0$$

ومنها نحصل على نقط الثبات الثمانية

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} , \quad y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} , \quad z = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

بالإضافة إلى ست نقط ثبات نحصل عليها من إعدام متغيرين من المتغيرات الثلاث x, y, z

$$(\pm 1, 0, 0) , \quad (0, \pm 1, 0) , \quad (0, 0, \pm 1)$$

لتعيين طبيعة نقط الثبات نختار نقطتين

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}} , \frac{1}{\sqrt{3}} , \frac{1}{\sqrt{3}} \right) , (1, 0, 0)$$

ونوجد حدود الدرجة الثانية من مفكوك تايلور للتعبير في الدالة Δg

$$\begin{aligned} \Delta g &= g(x+h_1, y+h_2, z+h_3) - g(x, y, z) \\ &= \frac{1}{2} [g_{xx}h_1^2 + g_{yy}h_2^2 + g_{zz}h_3^2 + 2(g_{xy}h_1h_2 + g_{yz}h_2h_3 + g_{zx}h_3h_1)] + \\ &\quad \cdot \text{higher powers of } h_1, h_2, h_3 \end{aligned}$$

يجب أن نختبر إشارة Δg في جوار صغير لنقط الثبات حيث h_1, h_2, h_3 مرتبطة بالعلاقة

$$d\phi = \phi_x h_1 + \phi_y h_2 + \phi_z h_3 = 0 \rightarrow xh_1 + yh_2 + zh_3 = 0$$

أيضا

$$g_{xx} = 2\lambda = g_{yy} = g_{zz},$$

$$g_{xy} = z, \quad g_{yz} = x, \quad g_{zx} = y$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}} , \frac{1}{\sqrt{3}} , \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \text{ عند } \lambda = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \text{ قيمة}$$

$$\Delta g = \frac{1}{\sqrt{3}} (h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) + \frac{2}{\sqrt{3}} (h_1 h_2 + h_2 h_3 + h_3 h_1) + \dots$$

ولكن

$$\begin{aligned} 2(h_1 h_2 + h_2 h_3 + h_3 h_1) &= (h_1 + h_2 + h_3)^2 - (h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) \\ &= -(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) \end{aligned}$$

$$i.e. \quad \Delta g = -\frac{2}{\sqrt{3}} (h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) + \dots < 0$$

· أى أن نقطة الثبات $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ نقطة نهاية عظمى محنية.
بالنسبة للنقطة $(1, 0, 0)$

$$\Delta g = 2[h_2 h_3] + \dots$$

من الواضح أن إشارة Δg تتغير حسب إشارتى h_2 و h_3 ومن ثم فإن $(1, 0, 0)$ هي نقطة برودة.

مثال ٧١: أوجد مساحة مقطع السطح الناقصى

$$S: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad a > b > c > 0$$

بالمستوى II $lx + my + nz = 0$

مقطع المستوى بالسطح الناقصى هو قطع ناقص. مساحة القطع

الناقص $\pi pq =$ حيث p, q أنصاف أطوال محاوره. حيث أن مركز القطع هو نقطة الأصل وأن p, q هما أكبر وأصغر قيم للمقدار

$$u = r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (1)$$

مقيدين بالعلاقاتين

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (2), \quad lx + my + nz = 0 \quad (3)$$

ومن ثم تكون الدالة المساعدة

$$f = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right) + 2\mu (lx + my + nz)$$

عند نقطة الثبات $df = 0$

$$2x + 2\frac{x}{a^2}\lambda + 2\mu l = 0 \quad (4)$$

$$2y + \frac{2y}{b^2}\lambda + 2\mu m = 0 \quad (5)$$

$$2z + \frac{2z}{c^2}\lambda + 2\mu n = 0 \quad (6)$$

بحساب (4) + y (5) + z (6) مع استعمال (1), (2), (3) نجد أن

$$x^2 + y^2 + z^2 + \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) + \mu (lx + my + nz) = 0$$

$$i.e. \quad x^2 + \lambda = 0$$

أيضا من (4), (5), (6)

$$\frac{x}{l(1+\lambda/a^2)} = \frac{y}{m(1+\lambda/b^2)} = \frac{z}{n(1+\lambda/c^2)} = -\mu$$

بالتعويض في (3) نحصل على

$$\frac{l^2}{1+\lambda/a^2} + \frac{m^2}{1+\lambda/b^2} + \frac{n^2}{1+\lambda/c^2} = 0$$

$$l^2 \left(1 + \frac{\lambda}{b^2}\right) \left(1 + \frac{\lambda}{c^2}\right) + m^2 \left(1 + \frac{\lambda}{a^2}\right) \left(1 + \frac{\lambda}{c^2}\right) +$$

$$+ n^2 \left(1 + \frac{\lambda}{a^2}\right) \left(1 + \frac{\lambda}{b^2}\right) = 0$$

$$\lambda^2 \left[\frac{l^2}{b^2 c^2} + \frac{m^2}{a^2 c^2} + \frac{n^2}{a^2 b^2} \right] + \dots + (l^2 + m^2 + n^2) = 0$$

ووجود هذه المعادلة هي p^2, q^2

$$p^2 q^2 = \frac{l^2 + m^2 + n^2}{\frac{l^2}{b^2 c^2} + \frac{m^2}{a^2 c^2} + \frac{n^2}{a^2 b^2}} = a^2 b^2 c^2 \frac{l^2 + m^2 + n^2}{a^2 l^2 + b^2 m^2 + c^2 n^2}$$

مساحة القطع الناقص

$$\pi pq = \pi abc \sqrt{\frac{l^2 + m^2 + n^2}{a^2 l^2 + b^2 m^2 + c^2 n^2}}$$

يمكن تعميم طريقة المضروبوات غير المعينة على دوال ذات متغيرات أكثر مع قيود أكثر. فمثلا لإيجاد نقط ثبات الدالة $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ المقيدة

بالعلاقات

$$\phi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \phi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \dots$$

$$\dots \phi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

نصاوى المشتقات الجزئية للدالة $F = f + \lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2 + \dots + \lambda_m \phi_m$

بالنسبة إلى x_1, x_2, \dots, x_n بالصفر حيث $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ثوابت،

المعادلات الناتجة مع معادلات القيود وعددها $m+n$ تعين قيم

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m.$$

تعارين ٦

١ - أوجد نقط الثبات للدوال الآتية مع تحديد طبيعتها

i) $x^4 + y^4 - 6(x^2 + y^2) + 8xy$

ii) $3y(x-1)^2 + 18y^2(2y-3) + x^3 - 3x$

iii) $x^4 + 64y^4 - 2(x+8y)^2$

iv) $(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)$ x) $x^4 + y^3 + 32x - 9y$

v) $x(3 - x^2 - y^2)$ (xi) $4x^2 + 10xy + 4y^2 - x^2y^2$

vi) $x^2y^2 - (x^2 + y^2)$ (xii) $x^4 + a^4y^4 - b^2(x + ay)^2$

vii) $\frac{2}{xy} - x^2 - y^2$ $xy \neq 0$ (xiii) $\frac{xy}{ba^3} + \frac{1}{x} - \frac{b}{y}$

viii) $x^3 + y^3 - 3xy$

ix) $x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$

٢ - أثبت أن للدوال الآتية نقط ثبات فريين كل منها، ميز نوعها

i) $x^3 + y^3 - 2(x^2 + y^2) + 3xy$ $(0, 0), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

ii) $(x+2y+2)/(x^2+y^2+1)$ $(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}), (-1, -2)$

٣ - أثبت أن للدالة $(x^2 + y^2 + 1)/(x + y + 1)^2$ نهاية صفري

عند $(1, 1)$ والدالة $(x^{1/2} + y^{1/2} + 1)/(x + y + 1)^{1/2}$ نهاية عظمى

عند $(1, 1)$

٤ - أثبت أن للدالة $(x+y)/(x^2+2y^2+6)$ نهاية عظمى عند $(2, 1)$

ونهاية صغرى عند $(-2, -1)$

٥ - أوجد النهايات المحلية للمسطح $\sin x + \sin y + \sin(x+y)$ في المربع

$$- \pi/2 \leq y \leq \pi/2, \quad -2 \leq x \leq 2$$

وكذلك المسطح $\sin^2 x \cos y + \sin^2 y \cos x$ حيث $0 \leq x, y < \pi$

٦ - أوجد نقط ثبات المسطح $(x+y)^3 + (x-y)^2 - 12(x+y)$ وميزها.

٧ - إختبر الدالة $x^{n+1} + (y-3)^n + (y+1)^n + (x-2)^n$ من حيث

النهايات العظمى والصغرى ونقطة البردعة حيث n عدد صحيح موجب.

٨ - أوجد نقط ثبات المسطح $z = x^2 + y^2 \cos x$ وحدد طبيعتها.

٩ - أثبت أنه ليس للدالة $x^7 + (x-y)^7$ نهايات عظمى أو صغرى محلية.

١٠ - أوجد جميع المشتقات الجزئية الأولى والثانية للدالة

$$u = (a^2x^2 + b^2y^2) e^{ax+by}$$

الرسم بالتقريب المنحنيين

$$x^2 + b^2y^2 + 2ax = 0, \quad a^2x^2 + b^2y^2 + 2by = 0$$

وضح أن المعادلتين تتحققان بقيمتين حقيقيتين فقط. من ثم وضح أن للدالة u

نقطتي ثبات فقط. ميز أنواعها.

١١ - أوجد النهاية للعظمى للدالة $v = xyz$ بحيث $x + y + 2z = 3a$ (حيث

a ثابت).

١٢ - أوجد النهاية العظمى للدالة $x^2 + y^2$ مقيدة بالشرط $x^2 + 2xy + 3y^2 = 1$

١٣ - أثبت أنه إذا كانت x, y, z تحقق العلاقة $a^3x + b^3y + c^3z = 1$

فإن قيمة الدالة $x^4 + y^4 + z^4$ عند نقطة ثباتها الوحيدة هي

$$\frac{1}{4}(a^4 + b^4 + c^4) \quad \text{. أثبت أنها نهاية صغرى.}$$

١٤ - إذا كانت $xyz\omega = 2$ فأوجد أصغر قيمة للمقدار

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{8} + \frac{\omega^2}{16}$$

١٥ - أوجد النقطة على القطع $y^2 = 2x, z = 0$ الأقرب ما يمكن للمستوى

$$z = x + 2y + 8$$

١٦ - أوجد أكبر وأصغر مسافة من النقطة $(0,0,0)$ إلى السطح الناقصى

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad a < b < c$$

١٧ - أوجد نقط السطح $z^2 - xy = 1$ الأقرب ما يمكن للنقطة الأصل.

١٨ - إذا كانت x, y, z موجبة أوجد النهاية العظمى للدالة $x^m y^n z^p$ حيث

$$a = x + y + z \text{ حيث } m, n, p \text{ موجبة}$$

١٩ - أوجد النهايات المحلية للدالة xyz المقيدة بأن قيم x, y, z موجبة

وبحث

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3$$

٢٠ - أثبت أن للدالة $Z = 2x + 4y - kx^2y^4, k \neq 0$ نقطة برودة وأنه

ليس لها نهايات محلية عظمى أو صغرى.

٢١ - إذا كانت x, y, z موجبة بحيث $x+y+z = 1$ أثبت أن

$$\left(\frac{1}{x} - 1\right)\left(\frac{1}{y} - 1\right)\left(\frac{1}{z} - 1\right) \geq 8$$

٢٢ - اختبر من حيث النهايات العظمى والصغرى المحلية المشروطة

$$(i) u = x^3 + y^3 + z^3, \quad x + y + z = 6$$

$$(ii) u = x + y + z, \quad \frac{4}{x} + \frac{9}{y} + \frac{16}{z} = 1$$

$$(iii) u = xyz, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3$$

٢- أوجد النهايات العظمى والصغرى المطلقة حال تواجدها للدوال

i. $z = xy, \quad x^2 + y^2 \leq 1$

ii. $z = x + y + z, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$

٤- احسب أصغر مسافة من النقطة $(2, 0, -1)$ إلى السطح $y^2 = x + z$

إذا اعتمد موضوع تكامل على بارامتر أو أكثر بالإضافة إلى متغير التكامل فإن نتيجة التكامل تعتمد على هذه البارامترات. مدعروض ثلاث حالات فيها موضوع التكامل دالة متصلة في كل من متغير التكامل والبارامتر ومشتقاته الأولى بالاعية إلى البارامتر أيضا متصلة. والحالات الثلاثة هي:

أ - أن يكون التكامل غير محدد

ب - أن يكون التكامل محددا وله نهايات ثابتة

ج - أن يكون التكامل محددا ونهاياته تعتمد على البارامترات

١ - التكامل غير محدد

نفرض

$$I(x, \alpha) = \int f(x, \alpha) dx$$

$$\Delta I = I(x, \alpha + \Delta \alpha) - I(x, \alpha) = \int [f(x, \alpha + \Delta \alpha) - f(x, \alpha)] dx$$

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} = \lim_{\Delta \alpha \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta \alpha} = \lim_{\Delta \alpha \rightarrow 0} \int \frac{f(x, \alpha + \Delta \alpha) - f(x, \alpha)}{\Delta \alpha} dx$$

بتطبيق نظرية القيمة المتوسطة

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} = \lim_{\Delta \alpha \rightarrow 0} \int f_{\alpha}(x, \alpha + \theta \Delta \alpha) dx \quad 0 < \theta < 1$$

حيث أن موضوع التكامل دالة متصلة في المتغير α من ثم

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} = \lim_{\Delta \alpha \rightarrow 0} \int f_{\alpha}(x, \alpha + \theta \Delta \alpha) dx = \int f_{\alpha}(x, \alpha) dx$$

$$i.e. \quad \frac{\partial I}{\partial \alpha} = \int \frac{\partial f}{\partial \alpha} dx$$

ب - التكامل محدد وله نهايات ثابتة
بنفس الخطوات السابقة يمكن أن نثبت أنه إذا كان

$$I(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha) dx$$

حيث a, b مقادير ثابتة لا تعتمد على α فإن

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} = \int_a^b \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, \alpha) dx$$

ج - التكامل محدد ونهاياته تعتمد على البارامتر
نعتبر

$$I(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha) dx$$

حيث a, b دوال من α ، نفرض أن

$$\int f(x, \alpha) dx = F(x, \alpha) + C$$

$$I(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha) dx = [F(x, \alpha)]_a^b = F(b, \alpha) - F(a, \alpha)$$

$$\frac{dI}{d\alpha} = \frac{\partial F(b, \alpha)}{\partial b} \frac{db}{d\alpha} + \frac{\partial F(b, \alpha)}{\partial \alpha} - \frac{\partial F(a, \alpha)}{\partial \alpha} \frac{da}{d\alpha} - \frac{\partial F(a, \alpha)}{\partial \alpha}$$

ولكن $\frac{\partial}{\partial t} F(t, \alpha) = f(t, \alpha)$ من ثم

$$\frac{dI}{d\alpha} = \frac{\partial F(b, \alpha)}{\partial \alpha} - \frac{\partial F(a, \alpha)}{\partial \alpha} + f(b, \alpha) \frac{db}{d\alpha} - f(a, \alpha) \frac{da}{d\alpha}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_a^b f(x, \alpha) dx \right] + f(b, \alpha) \frac{db}{d\alpha} - f(a, \alpha) \frac{da}{d\alpha}$$

$$i.e., \quad \frac{dI}{da} = \int_a^b \frac{\partial}{\partial a} f(x, a) dx + f(b, a) \frac{db}{da} - f(a, a) \frac{da}{da}$$

مثال ٧٧: لإيجاد

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} \quad \int \frac{-2x dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{-x}{x^2+a^2} - \frac{1}{a^2} \tan^{-1} \frac{x}{a} + B$$

نبدأ أولاً بالتكامل

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + A$$

بالتفاضل تحت علامة التكامل إحالة (أ) بنسبة إلى a نحصل على

$$-\int \frac{2adx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a} \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} \left(\frac{-x}{a^2}\right) - \frac{1}{a^2} \tan^{-1} \frac{x}{a}$$

$$i.e. \quad \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C$$

مثال ٧٨: لإيجاد مشتقة $\int_{x^2}^{-\sin x} e^{xt} dt$ بالنسبة إلى x

$$\frac{d}{dx} \int_{x^2}^{-\sin x} e^{xt} dt = \int_{x^2}^{-\sin x} t e^{xt} dt - e^{-x \sin x} \cos x - 2x e^{x^3}$$

مثال ٧٩: لإيجاد $I(a) = \int_0^{\infty} \frac{1-e^{-ax}}{xe^x} dx$ ، نشتق بالنسبة إلى a

$$I'(a) = \int_0^{\infty} e^{-(a+1)x} dx$$

$$dx = \frac{-1}{a+1} [e^{-(a+1)x}]_0^{\infty} = \frac{da}{a+1} = I(a) = \ln(a+1) + C$$

$$I(0) = 0 = C = I(a) = \ln(a+1)$$

مثال ٨٠: لإيجاد

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-xt} - e^{-bt}}{t} dt$$

حيث $0 < a < b$ نفرض

$$I(a, b) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$$

$$\frac{\partial I}{\partial a} = \int_0^{\infty} -e^{-at} dt = -\frac{1}{a}, \quad \frac{\partial I}{\partial b} = \frac{1}{b}$$

$$I = \int -\frac{1}{a} da = -\ln a + C(b) \quad \frac{\partial I}{\partial b} = C'(b) = \frac{1}{b} - C = \ln b$$

$$I(a, b) = \ln b - \ln a = \ln b/a$$

مثال ٧٦ : لإثبات أن

$$\int_0^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = [f(\infty) - f(0)] \ln \frac{a}{b}$$

حيث $f(x)$ متصلة ومنتهية هي ومشتقتها الأولى في المنطقة

$$0 \leq x \leq \infty$$

نعتبر

$$I(a, b) = \int_0^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \frac{\partial I}{\partial a} = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} f'(ax) dx$$

$$= \frac{1}{a} [f(\infty) - f(0)]$$

$$\rightarrow I(a, b) = [f(\infty) - f(0)] \log a + C(b)$$

$$\frac{\partial I}{\partial b} = C'(b) = -\frac{1}{b} [f(\infty) - f(0)] \quad \text{بالمثل}$$

$$\rightarrow C(b) = -[f(\infty) - f(0)] \ln b$$

$$\rightarrow I(a, b) = [f(\infty) - f(0)] \ln \frac{a}{b} + D$$

يمكن إثبات أن $D=0$ وذلك بوضع $a=b$

تمارين ٧

١ - إثبت أن

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{a - \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}} \quad a > 1$$

ثم بالتفاضل تحت علامة التكامل إثبت أن

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{(a - \cos x)^2} = \frac{a\pi}{(a^2 - 1)^{3/2}}$$

٢ - من العلاقة

$$\int_0^{\infty} e^{-t} \cos xt \, dt = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$\int_0^{\infty} t e^{-t} \sin xt \, dt \quad \text{أوجد}$$

٣ - من التكامل

$$\int_0^1 x^y \, dx = \frac{1}{y+1}$$

إثبت أن

$$\int_0^1 x^y \ln x \, dx = -\frac{1}{(y+1)^2}$$

$$\int_0^{\pi} \sin ax \, dx = \frac{1 - \cos \pi a}{a}$$

٤ - إثبت أن

ثم استنتج أن

$$(i) \int_0^{\pi} x \cos ax \, dx = [\pi a \sin(\pi a) + \cos(\pi a) - 1] / a^2$$

$$(ii) \int_0^{\pi} x^2 \sin x \, dx = \pi^2 - 4$$

$$(iii) \frac{d}{dt} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos(xt)}{x} dx, \frac{d}{dt} \int_{\sin t}^{\cos t} \ln(x+t) dx$$

أوجد

٥ - أثبت أن

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{2a}$$

ثم استنتج أن

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} = \frac{(2n)! \pi}{2^{2n+1} (n!)^2 a^{2n+1}}$$

٦ - احسب

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{1+a \cos x} dx, \quad a^2 < 1$$

وعندئذ استنتج أن

$$\int_0^{\pi} \ln(1+a \cos x) dx = \pi \ln \left\{ \frac{1+\sqrt{1-a^2}}{2} \right\}$$

٧ - احسب

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{A+B \cos 2\theta}$$

حيث $A > B \geq 0$ بالتفاضل بالتمية إلى A أوجد

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta)^2} \quad ab \neq 0$$

٨ - أثبت أن

$$\int_0^1 x^a dx = \frac{1}{a+1} \quad a \neq -1$$

ثم نستنتج أن

$$\int_0^1 \frac{x^a - 1}{\ln x} dx = \ln(a+1)$$

٩ - إذا كانت $y = \int_0^x f(a) \sin k(x-a) da$ حيث k عدد ثابت
فثبت أن y يحقق المعادلة $y'' + k^2 y = f(x)$ ومن ثم لوجد

$$\frac{1}{k} \int_0^{\infty} e^{-x} \sin k(x-a) da$$

١٠ - إذا كان

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \frac{\pi}{2}, \quad a > 0$$

وكن

$$y(t) = \int_0^{\infty} \frac{\sin tx}{x(x^2+1)} dx$$

ثبت أن $y'' - y + \frac{\pi}{2} = 0$

$$f(y) = \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2xy dx \quad 11 - \text{إذا كان}$$

$$f(y) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-y^2} \quad \text{وأن } f'(y) + 2yf(y) = 0$$

١٢ - إذا كانت $f(x) = \int_0^{\pi/2} \cos(x \cos \theta) d\theta$ فثبت أن f تحقق
المعادلة

$$x \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{df}{dx} + xf = 0$$

$$I = \int_0^{\infty} e^{-u^2 t} \cos(au) du \quad 13 - \text{إذا كانت}$$

فثبت أن

$$\frac{\partial I}{\partial a} = -\frac{a}{2t} I$$

ثم إستنتج أن

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-s^2/4t}$$

مع العلم بأن

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

٤-١ استخدم التفاضل تحت علامة التكامل لإيجاد

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{\tan^{-1} e^{xt}}{t} dt$$

١٥- استخدم التفاضل تحت علامة التكامل لإثبات أن

$$\int_0^{\infty} \frac{\tan^{-1} ax}{x(x^2+1)} dx = \frac{1}{2} \pi \ln(1+a) \quad a > 0$$

١٦- استخدم التفاضل تحت علامة التكامل لإيجاد

$$\int_0^{1/\sqrt{x}} \ln(1+xt^2) dt \quad x > 0$$

١٧- إذا كانت $1 < a < 1$ - فإثبت أن

$$\int_0^{\pi/2} \ln(1+\cos x \cos ax) \sec x dx = \frac{1}{2} \pi^2 \left(\frac{1}{4} - a^2 \right)$$

١٨- باستخدام التفاضل تحت علامة التكامل أوجد

$$(i) \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}} dt \quad x > 0 \quad (\text{Hint } \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2})$$

$$(ii) \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} \sin bx}{x} dx$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \int_0^x (x-t)^2 f(t) dt$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx dx = \frac{a}{a^2+b^2}$$

اثبت أن

$$(i) \int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\cos bx - \cos cx}{x} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{a^2+c^2}{a^2+b^2}$$

$$(ii) \int_0^{\infty} \frac{\cos bx - \cos cx}{x} dx = \ln \frac{c}{b}$$

$$(iii) \int_0^{\infty} \frac{\sin bx - \sin cx}{x} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{b+c}{b-c} \quad b > c > 0$$

$$(iv) \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-cx}}{x} \sin bx dx = \tan^{-1} \frac{d}{b} - \tan^{-1} \frac{a}{b}$$

٢٠ - اثبت أن

$$(i) \int_0^{\infty} \frac{f(ax^2) - f(bx^2)}{x} dx = \frac{1}{2} [f(\infty) - f(0)] \ln \frac{a}{b}$$

$$(ii) \int_0^{\infty} \frac{f(\ln x^a) - f(\ln x^b)}{\ln x} dx = [f(\ln \infty) - f(\ln 1)] \ln \frac{a}{b}$$

$$(iii) \int_1^{\infty} [f(x^a) - f(x^b)] \frac{dx}{x \ln x} = [f(\ln \infty) - f(\ln 1)] \ln \frac{a}{b}$$

٢١ - اثبت أن

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+a^2x^2)}{b^2+x^2} dx = \frac{\pi}{b} \ln(1+ab) \quad a > 0, b > 0$$

$$\int_0^1 \frac{\sin(p \ln x)}{\ln x} dx = \tan^{-1} p, \quad \int_0^{\infty} (e^{-x^2/x^2} - e^{-b^2/x^2}) dx = \sqrt{\pi} (b-a)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\tan^{-1} ax - \tan^{-1} bx}{x} dx = \frac{\pi}{2} \ln \frac{a}{b} \cdot \int_0^1 \frac{x^p - x^q}{\ln x} dx = \ln \frac{p+1}{q+1}$$

٧٢ - أثبت أن

$$\int_0^{\infty} \ln \frac{a+be^{-cx}}{a+be^{-dx}} \frac{dx}{x} = \ln [a - \ln(a+b)] \ln \frac{c}{d}$$

$$\int_0^a \ln(1 + \tan a \tan x) dx = a \ln \sec a$$

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-a^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \pi \ln \frac{1+\sqrt{1-a^2}}{2} \quad |a| \leq 1$$

٧٣ - أوجد قيمة

$$\int_0^{x^{-1/2}} \ln(1+xt^2) dt = x^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\pi}{2} + \ln 2 - 2 \right) \quad x > 0$$

$$\int_0^1 \frac{1+ax}{1-ax} \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$$

٧٤ - أثبت أن

$$\int_0^{\pi} \ln \frac{1+x \cos \theta}{1-x \cos \theta} \frac{d\theta}{\cos \theta} = 2 \pi \sin^{-1} x \quad |x| < 1$$

٧٥ - باستخدام التفاضل تحت علامة التكامل أوجد

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax^n} - e^{-bx^n}}{x} dx, \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax^n} - e^{-bx^n}}{x} dx, a, b > 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-xt^2} dt = \text{constant } c$$

٧٦ - أوجد $\frac{dy}{dx}$ حيث

مثال:

إذا كانت $f(x) = \int_0^{\infty} e^{-t^2 - x^2 t^2} dt$, $0 < x < \infty$ فاثبت أن

$$f'(x) = -2 f(x)$$

من ثم أوجد $f(x)$

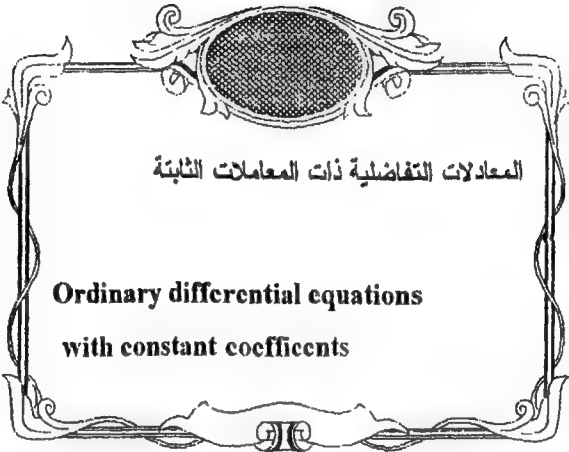
الحل:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2x \int_0^{\infty} e^{-t^2 - x^2 t^2} t^{-2} dt \\ &= -2x \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{y^2} - y^2} \left(-\frac{1}{x} dy \right) , \left(\frac{x}{t} = y \right) \\ &= -2f(x) \Rightarrow f(x) = ce^{-2x} \end{aligned}$$

عند $x = 0$ نحصل على

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt \Rightarrow C = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\text{i.e., } f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2x}$$



المعادلات التفاضلية ذات المعاملات الثابتة

**Ordinary differential equations
with constant coefficients**

المعادلات التفاضلية ذات المعاملات الثابتة

٦-١ مقدمة ومبادئ عامة

أشرنا في دراسة سابقة طرق تكوين المعادلات التفاضلية العادية الجزئية كما عرفنا رتبها وقوتها، سوف ندرس تفصيلا بعضا من المعادلات التفاضلية من رتب أعلى من الأولى، تسمى معادلة تفاضلية خطية إذا كانت من الدرجة الأولى ليس فقط في المتغير التابع y ولكن أيضا في جميع مشتقاته. الصورة العامة لمعادلة تفاضلية خطية من الرتبة n هي

$$a_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + a_n(x) = f(x) \quad (1)$$

حيث $a_0 \neq 0$ وجميع الدوال $(a_i(x))$ وكذلك $f(x)$ دوال من x

فقط.

إذا رمز للمؤثر $\frac{d}{dx}$ بالرمز D والمؤثر

$$a_0(x) \frac{d^n}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{d}{dx} + a_n(x) \dots (2)$$

بالرمز $L_n(D)$ أو ببساطة $L(D)$ أمكن كتابة المعادلة (1) بالهيئة

$$L_n(D) y = f(x)$$

يسمى التعبير $L_n(D)$ معامل تفاضلي خطي من الرتبة n . هذا

التعبير ليس مقداراً جبرياً مضروباً في y ولكنه رمز يعبر عن عمليات

تفاضلية تجرى على y .

خواص المؤثرات $D, L(D)$.

للمؤثرات D الخواص الآتية:

$$(1) \quad D^n(u+v) = D^n u + D^n v$$

$$(2) \quad D^n D^n u = D^{2n} u$$

$$(3) \quad D^n (D^n u) = D^n (D^n u)$$

$$(4) \quad D^n (cu) = c D^n u$$

بينما للمؤثر $L(D)$ الخاصيتين التاليتين

$$\begin{aligned} (5) \quad L(D) (u+v) &= a_0 D^n (u+v) + a_1 D^{n-1} (u+v) + \dots \\ &\quad + a_{n-1} D (u+v) + a_n (u+v) \\ &= a_0 D^n u + a_1 D^{n-1} u + \dots + a_{n-1} D u + a_n u \\ &\quad + a_0 D^n v + a_1 D^{n-1} v + \dots + a_{n-1} D v + a_n v \\ &= L(D) u + L(D) v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6) \quad L(D) (cu) &= ca_0 D^n u + ca_1 D^{n-1} u + \dots + ca_{n-1} D u \\ &\quad + ca_n u = c L(D) u \end{aligned}$$

من (5)، (6)، يتلى وصف المؤثر $L(D)$ بالخطية.

من الخواص السابقة يمكن التحقق من إمكانية تحليل مؤثر تفاضلى إلى عوامل كما لو عولج كمقدار جبرى. على سبيل المثال يمكن أن نكتب المؤثرات الآتية على هيئة عوامل من مؤثرات.

$$2x^2 D^2 + 5xD + 6 = (2xD + 3) (xD + 2)$$

$$2D^2 + 5D + 2 = (2D + 1) (D + 2)$$

من الخواص الهامة للمؤثرات الخطية ذات المعاملات الثابتة خاصية الإبدال بمعنى أنه إذا كان $S(D)$ ، $L(D)$ مؤثرين خطيين معاملتهما ثابتة فلن

$$L(D) S(D) y = S(D) L(D) y$$

تسمى المعادلة التفاضلية (1) غير متجانسة (Not homogeneous) إذا كانت $f(x) \neq 0$ وإلا سميت متجانسة (Homogeneous) أو محتزنة (Reduced). من الملامح الرئيسية لحل معادلة تفاضلية متجانسة النظرية التالية:

نظرية:

إذا كانت y_1, y_2, \dots, y_n حلولاً للمعادلة $L(D)y = 0$ فإنه لأي ثابت اختيارية $\{c_i\}$ تكون الدالة $c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$ أيضاً حلاً. الإثبات:

نعتبر

$$L(D)(c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n)$$

من الخواص الخطية (3)، (4) للمؤثر التفاضلي الخطي $L(D)$ نحصل على

$$L(D)(c_1 y_1 + \dots + c_n y_n) = c_1 L(D)y_1 + \dots + c_n L(D)y_n = 0$$

وذلك لأن $L(D)y_i = 0$ لجميع قيم $\{i=1, \dots, n\}$.

يمكن أن نصيغ النظرية السابقة لفظياً كالآتي:

أي تركيب خطي من مجموعة حلول معادلة تفاضلية خطية متجانسة هو أيضاً حل للمعادلة التفاضلية.

يرتبط دائماً حل معادلة تفاضلية غير متجانسة $L(D)y = f(x)$ بحل

المعادلة التفاضلية للمتجانسة أو للمختزلة $L(D)y = 0$ حسب النظرية التالية. نظرية:

إذا كان y_p أي حل خاص للمعادلة (1) وكان y_c حل للمعادلة

$$L(D)y = 0 \text{ فإن } y_c + y_p \text{ يكون حلاً للمعادلة (1).}$$

حيث $L(D)y_p = f(x)$ وأن $L(D)y_c = 0$ من ثم وباعتبار
خطية المؤثر $L(D)$ نحصل على

$$L(D)(y_c + y_p) = L(D)y_c + L(D)y_p = f(x)$$

من النظرية السابقة نرى أن الحل العام للمعادلة (1) يتكون من
مجموع حلين، الحل y_c وهو حل المعادلة المتجانسة ويسمى الحل
المتنم (Complementary Solution) أو الدالة المتنمة أو الحل العارض
(Transient Solution) والحل y_p وهو أى حل يحقق (1) ويسمى حلاً خاصاً
(Particular Solution) للمعادلة غير المتجانسة.

مقارنة بالمعادلات الخطية الجبرية يكمن أن نقول أن $(3, 1, 2)$ هو حل
خاص للمعادلة $x + y - z = 2$ لإيجاد الحل العام للمعادلة السابقة يجب
إضافة الحل المتنم وهو حل المعادلة المتجانسة $x + y - z = 0$
وهو $(A, B, A+B)$ والذي يمكن كتابته بالهيئة $A(1, 0, 1) + B(0, 1, 1)$
ومن ثم يكون الحل العام للمعادلة الأولى هو:
 $(3, 1, 2) + A(1, 0, 1) + B(0, 1, 1)$ *

يجب أن نلاحظ أن:

١. المتجهان $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$ مستقلان خطياً
 ٢. أى حل للمعادلة الجبرية يمكن أستنتاجه من الحل *
- من النظريات المرتبطة بخطية $L(D)$ والمتعلقة بجمع الحلول
النظرية التالية.

نظرية:

إذا كانت $(y_i = i = 1, 2, \dots, m)$ حلولاً خاصة للمعادلة

$$L_m(D)y = f_1(x)$$

فإن $y_1 + y_2 + \dots + y_m$ هو حل خاص للمعادلة

$$L_n(D) y = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_m(x)$$

إثبات هذه النظرية يتحقق مباشرة من خاصية خطية المؤثر $L_n(D)$.
استخدام حل معروف لإيجاد حل آخر

لا توجد طريقة تحليلية عامة لإيجاد حلول معادلة تفاضلية سواء كانت غير متجانسة أو متجانسة. هذه الصعوبة يمكن في بعض الأوقات تجنبها ببعض المعطيات كإيجاد الحل العام لمعادلة تفاضلية معلوم دالتها المتممة (في هذه الحالة من أجل طريقة تغيير البارامترات التي سنعرضها لاحقاً) أو إختزال رتبة معادلة تفاضلية بمعلومية أحد حلولها. في الحالة الأخيرة يمكن إيجاد الحل الثاني ومن ثم الحل العام إذا كانت المعادلة التفاضلية متجانسة ومن الرتبة الثانية.

نفرض أن $y = u$ هو حل للمعادلة التفاضلية

$$y'' + p(x) y' + q(x) y = 0 \quad (5)$$

بفرض حلها العام على الهيئة $y = uv$ أى باستبدال المتغير التابع y بالمتغير v نحصل على

$$uv'' + v'(2u' + pu) + v\{u'' + pu' + qu\} = 0 \quad (6)$$

ينعدم الحد الأخير في المعادلة السابقة بسبب أن u حل للمعادلة المتممة ومن ثم نحصل على

$$v''/v' = \frac{-2u'}{u} - p \quad (7)$$

بالتكامل نحصل على

$$\text{i.e. } v' = \frac{A}{u^2} e^{-\int p dx}$$

ومن ثم فإن

$$v = A \int \frac{1}{u^2} e^{-\int p dx} dx + B \quad (8)$$

ويصبح الحل العام مساويا

$$y = uv = Au \int \frac{1}{u^2} e^{-\int p dx} dx + Bu$$

الدالة $y_1 = u$ ظهرت كأحد الحلول ويصبح الحل الثاني مساويا

$$y_2 = u \int \frac{1}{u^2} e^{-\int p dx} dx \quad (9)$$

العرض السابق يوضح أنه يمكن إختزال رتبة معادلة تفاضلية

متجانسة أو غير متجانسة بمقدار وحده بمعلومية أحد حلول المعادلة

المتجانسة.

من الممكن الحصول على النتيجة السابقة بطريقة أخرى كالآتي:

نفرض أن y_1, y_2 حلان مستقلان للمعادلة التفاضلية، من ثم

$$y_1'' + p y_1' + q y_1 = 0 \quad (1), \quad y_2'' + p y_2' + q y_2 = 0 \quad (2)$$

بضرب المعادلة الأولى في y_2 والثانية في y_1 ثم الطرح نحصل على

$$y_2'' y_1 - y_1'' y_2 + p(y_2' y_1 - y_1' y_2) = 0$$

بوضع

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{y_2}{y_1} \right)$$

نحصل على

$$W' + pW = 0 \Rightarrow \ln W = \int -p dx \Rightarrow W = e^{-\int p dx}$$

$$i.e., \quad y_1^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{y_2}{y_1} \right) = e^{-\int p dx}$$

$$or \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{y_2}{y_1} \right) = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p dx}$$

بالتكامل نحصل على الحل الثانى y_2 بدلالة y_1

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p dx} dx \quad (10)$$

٦-٢ معادلات تفاضلية متجانسة ذات معاملات ثابتة

الصيغة العامة لمعادلة تفاضلية ذات معاملات ثابتة هي

$$(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n) y = f(x) \quad (11)$$

حيث جميع المعاملات $\{a_i\}$ ثوابت والتي يمكن أن تكتب فى حالة الرتبة الثانية بالهيئة

$$(a D^2 + b D + c) y = f(x). \quad (12)$$

سوف نبدأ بالبحث عن حل معادلة متجانسة من الرتبة الثانية

$$(a D^2 + b D + c) y = 0 \quad (13)$$

وذلك بفرض حل $y = A e^{mx}$ حيث m ثابت نزمع حسابه. بالتعويض فى المعادلة التفاضلية

$$A e^{mx} (a m^2 + b m + c) = 0.$$

حيث أن e^{mx} لا يمكن أن تساوى صفراً وحيث أن مساواة A بالصفر يؤدي إلى الحل التافه $y=0$ والذى لا نهتم به لذا يجب أن يكون

$$am^2 + bm + c = 0$$

(14)

وهي معادلة جبرية تعرف باسم المعادلة المساعدة (Auxiliary Equation).
 جذور هذه المعادلة تميز الحلول الممكنة وغير التافهة للمعادلة المعطاة.
 بمطابقة صيغة المعادلة بصيغة المؤثر التفاضلي يمكن أن نكتشف طريقة
 عملية لكتابة المعادلة المساعدة وهي أن نساوي المعامل التفاضلي بالصفر
 على أن يلعب D في هذه الحالة دور m وتصبح المعادلة المساعدة

$$aD^2 + bD + c = 0$$

المعادلة المساعدة في الحالة السابقة معادلة من الدرجة الثانية
 وجذورها إما أن تكون حقيقية مختلفة أو حقيقية متساوية أو مركبة مترافقة.
 لإيجاد حل (13) لدرس الحالات الآتية:
 حالة 1:

للمعادلة المساعدة جذران مختلفان m_1, m_2 في هذه الحالة نحصل

$$y_1 = e^{m_1 x}, y_2 = e^{m_2 x} \text{ على الحلين المستقلين}$$

ومن ثم يكون حل (13) العام هو تركيب خطي إختياري من

$$e^{m_1 x}, e^{m_2 x}$$

$$y = A e^{m_1 x} + B e^{m_2 x}$$

مثال 1:

$$\text{لوجد الحل العام للمعادلة } (D^2 - 3D - 4)y = 0$$

$$0 = (D^2 - 3D - 4) = (D - 4)(D + 1) \text{ المعادلة المساعدة هي}$$

وجذورها 4, -1. من ثم يكون الحل العام مساويا

$$y = A e^{4x} + B e^{-x}$$

حالة ٢:

للمعادلة المساعدة جذران حقيقيان متساويان m, m .

في هذه الحالة نحصل على حل واحد $y_1 = e^{mx}$ للحصول على الحل
التالي نستخدم الصيغة (10)

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-p dx} dx$$

وحيث أن الجذرين متساويان $m + m = 2m = -b/a$ بالتالي

$$y_2 = e^{mx} \int e^{-2mx} e^{-\int b/a dx} dx = e^{mx} \int e^{-2mx} e^{-\int 2m dx} dx$$

$$= \frac{e^{mx}}{2m} \int dx = \frac{x}{2m} e^{mx}$$

ويكون الحل العام مساويا

$$y = e^{mx} (A + Bx)$$

مثال ٢:

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $(D^2 - 6D + 9) y = 0$

المعادلة المساعدة

$$0 = D^2 - 6D + 9 = (D - 3)^2$$

وجذورها 3, 3 ومن ثم يكون الحل العام مساويا

$$y = e^{3x} (A + Bx)$$

للمعادلة المساعدة جذران تخيليان مترافقان $\alpha \pm i\beta$ ،
 في هذه الحالة تكون المعادلة المساعدة هي

$$m^2 - 2\alpha m + (\alpha^2 + \beta^2) = 0$$

$$y'' - 2\alpha y' + (\alpha^2 + \beta^2) y = 0$$

الحل بالهيئة $y = Me^{(\alpha+i\beta)x} + Ne^{(\alpha-i\beta)x}$ يمثل بدوال مركبة

وليس بدوال حقيقة كما نتوقع ونرغب. لذا يجب تحويل صيغة الحل السابقة
 إلى صيغة من دوال حقيقة يمكن قبولها

$$y = Me^{(\alpha+i\beta)x} + Ne^{(\alpha-i\beta)x}$$

$$= Me^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) + Ne^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x)$$

$$= (M+N) e^{\alpha x} \cos \beta x + (M-N) i e^{\alpha x} \sin \beta x$$

يمكن التحقق من أن الدالتين $e^{\alpha x} \cos \beta x$, $e^{\alpha x} \sin \beta x$

مستقلتان خطيا ويحققان المعادلة التفاضلية. على سبيل المثال نعتبر الدالة

$$y = e^{\alpha x} \cos \beta x$$

$$y = e^{\alpha x} \cos \beta x \rightarrow y' = \alpha e^{\alpha x} \cos \beta x - \beta e^{\alpha x} \sin \beta x$$

$$\rightarrow y'' = e^{\alpha x} (\alpha^2 \cos \beta x - 2\alpha\beta \sin \beta x - \beta^2 \cos \beta x)$$

$$y'' - 2\alpha y' + (\alpha^2 + \beta^2) y = e^{\alpha x} [\alpha^2 \cos \beta x - 2\alpha\beta \sin \beta x - \beta^2 \cos \beta x$$

$$- 2\alpha (\alpha \cos \beta x - \beta \sin \beta x) + (\alpha^2 + \beta^2) \cos \beta x] = 0$$

من ثم يكون الحل العام عندما تكون الجذور تخيلية مترافقة

بالهيئة $\alpha \pm i\beta$ معاويا

$$y = e^{\alpha x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x)$$

مثال ٣:

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $(D^2 - 4D + 13)y = 0$

المعادلة المساعدة هي

$$0 = D^2 - 4D + 13 = (D - 2)^2 + 9 \rightarrow D = 2 \pm 3i$$

من ثم فإن الحل العام يساوي

$$y = e^{2x} (A \cos 3x + B \sin 3x)$$

٣-٦ معادلات متجانسة من رتب أعلى

حل معادلة تفاضلية متجانسة ذات معاملات ثابتة من رتبة أعلى من

الرتبة الثانية

$$(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n) y = 0 \quad n > 2, a_0 \neq 0$$

يجرى على نفس الوتيرة كحالة الرتبة الثانية، التعويض $y = Ae^{mx}$

بحول حل المعادلة التفاضلية إلى حل المعادلة الجبرية المساعدة

$$a_0 m^n + a_1 m^{n-1} + \dots + a_{n-1} m + a_n = 0$$

إذا كان m_1 جنرا حقيقيا للمعادلة غير مكرر كان الحل المقابل هو $e^{m_1 x}$

إذا كان m_1 جنرا حقيقيا للمعادلة مكررا k من المرات كانت الحلول المقابلة

$$e^{m_1 x}, x e^{m_1 x}, x^2 e^{m_1 x}, \dots, x^{k-1} e^{m_1 x}$$

هي

إذا كان الجذران التخيليان المترافقان $\alpha \pm i\beta$ مكررين k من المرات
كانت الحلول المقابلة هي

$$e^{\alpha x} [(A_1 + A_2 x + \dots + A_k x^{k-1}) \cos \beta x \\ + (B_1 + B_2 x + \dots + B_k x^{k-1}) \sin \beta x].$$

مثال 4:

$$(D^3 + 6D^2 + 12D + 8) y = 0 \quad \text{حل المعادلة}$$

المعادلة المساعدة

$$0 = (D^3 + 6D^2 + 12D + 8) = (D + 2)^3$$

وجذورها تملأى -2, -2, -2 ومن ثم فإن الحل العام يسأوى

$$y = (A + Bx + Cx^2) e^{-2x}$$

مثال 5:

حل المعادلة

$$(D^5 - 2D^4 + 8D^3 - 16D^2 + 16D - 32) y = 0$$

المعادلة المساعدة

$$0 = (D^5 - 2D^4 + 8D^3 - 16D^2 + 16D - 32) = (D - 2) (D^2 + 4)^2$$

وجذورها هي $2, \pm 2i, \pm 2i$ والحل العام للمعادلة يسأوى

$$y = Ae^{2x} + (A_1 + A_2 x) \cos 2x + (B_1 + B_2 x) \sin 2x$$

٤-٦ المعادلات التفاضلية غير المتجانسة ذات المعاملات الثابتة

المؤثرات العكسية (Inverse Operators)

سوف نعرض للطرق الرمزية لتعيين الحلول الخاصة من خلال عرض مفهوم وخواص المؤثرات العكسية. حتى الآن تعرضنا لمؤثرات $L(D)$ محتوية على قوى موجبة للمؤثر D . حيث أن عملية التفاضل $\frac{d}{dx}$ وعملية التكامل غير المحدد (ثابت التكامل غير ذي بال) $\int \dots dx$ عمليتان عكسيتان، أى عند تطبيق المؤثرين بالتعاقب يعطيان مؤثر الوحدة

$$i.e. \quad \frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x) = \int \frac{d}{dx} f(x) dx$$

لذا نرى أنه إذا رمزنا لعملية التفاضل بالرمز D فإنه من المناسب والطبيعى أن نرمز لعملية التكامل بالرمز $1/D$ أو D^{-1} بالمثل $D^{-1}u$ تعبر عن فيض من u من التكاملات المتتالية بالنسبة إلى x للدالة u . إمتدادا لهذه الصيغ الرمزية سوف نكتب $1/L(D)$ أو $L^{-1}(D)$ ليرمز للمؤثر العكسى للمؤثر $L(D)$. أى أن

$$L^{-1}(D) L(D) u = L(D) L^{-1}(D) u = u$$

نعلم كيفية إجراء المؤثر $L(D)$ على دالة $f(x)$ بحكم تكوينه ولكن المؤثر $1/L(D)$ يحتاج لإيضاح وتفسير تأثيره على الدالة $f(x)$. نبدأ بإيضاح تأثير المؤثر $1/L_n(D)$ على دالة $f(x)$. بإعتبار الحالة

$$n = 1$$

أى نعتبر

$$y = \frac{1}{L_1(D)} f(x) = \frac{1}{D-a} f(x) .$$

هذا التأثير يكافئ حل المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى

$$(D-a) y = f(x).$$

حل هذه المعادلة يساوى

$$y = Ae^{ax} + e^{ax} \int e^{-ax} f(x) dx$$

بإهمال الحد e^{ax} باعتبار أن هذا الحد يظهر فى الدالة المتممة عند اعتبار معادلات تفاضلية من رتب أعلى من الأولى والتركيز على الحد التالى باعتباره مقدمة لإيجاد تعبير لـ عمل المؤثر $1/L(D)$ على دالة $f(x)$.
نعتبر

$$y_p = e^{ax} \int e^{-ax} f(x) dx$$

سوف ندرس الحالات الآتية:

حالة ١:

$$f(x) = x^n$$

$$y_p = e^{ax} \int e^{-ax} x^n dx = e^{ax} \left[-\frac{1}{a} x^n e^{-ax} + \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{-ax} dx \right]$$

$$= -\frac{x^n}{a} + \frac{n}{a} \frac{1}{D-a} x^{n-1} = -\frac{x^n}{a} - \frac{n}{a^2} x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{a^2} \frac{1}{D-a} x^{n-2}$$

$$= -\frac{x^n}{a} - \frac{n}{a^2} x^{n-1} - \frac{n(n-1)}{a^2} x^{n-2} - \dots - \frac{n!}{a^n}$$

النتيجة السابقة من الممكن الحصول عليها بمعاملة $1/(D-a)$

معاملة جبرية وفكة بنظرية ذات الحدين فى قوى D التصاعدية وتنفذ

المؤثرات الناتجة على x^n

$$\frac{1}{D-a} x^n = -\frac{1}{a} (1 - \frac{D}{a})^{-1} x^n$$

$$= -\frac{1}{a} \left(1 + \frac{D}{a} + \frac{D^2}{a^2} + \dots + \frac{D^n}{a^n} + \dots \right) x^n$$

$$= -\frac{x^n}{a} - \frac{n}{a^2} x^{n-1} - \dots - \frac{n!}{a^n}$$

العرض السابق يوضح الطريقة التي يمكن إتباعها عند تنفيذ المؤثر

$L(D)$ / على كثيرة حدود وهي فك المقدار $L(D)$ / فى قوى D

التصاعدية (بنظرية ذات الحدين أو بالقسمة) حتى قوى D التي تتعدى عددها كثيرة الحدود.

مثال ٦:

أوجد الحل الخاص للمعادلة $(D^2 - 3D + 1)y = x^3 + 2x$

بتنفيذ المؤثر العكسى على طرفين نحصل على

$$y = \frac{1}{1 - 3D + D^2} (x^3 + 2x) = (1 + 3D - 8D^2 + 21D^3) (x^3 + 2x)$$

$$= x^3 + 9x^2 + 50x + 132$$

فى المثال السابق أوجدنا مفتوك $\frac{1}{1 - 3D + D^2}$ بقسمة البسط على المقام

مثال:

أوجد الحل الخاص للمعادلة

$$(D^2 + 1)y = x^4 - 2$$

بالتأثير بالمؤثر العكسى ثم فكه بنظرية ذات الحدين

$$y = \frac{1}{1 + D^2} (x^4 - 2) = (1 - D^2 + D^4) (x^4 - 2) = x^4 - 12x^2 + 22$$

يمكن إيجاد الحل الخاص عندما يكون الطرف الأيمن ثابتاً كالآتى:

أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية

$$(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n) y = b \quad a_n \neq 0$$

بالتأثير بالمؤثر العكسي نحصل على

$$y = \frac{1}{a_0 D^n + \dots + a_{n-1} D + a_n} b$$

حيث أننا في مفكوك المؤثر العكسي لا نحتاج لأكثر من الحد الأول وهو

الحد الذي ينتج بوضع $D=0$ من ثم يكون الحل مساوياً b/a_n .إذا كان $a_n=0$ في المثال السابق فإن الحل الخاص يساوى

$$\frac{1}{n} \frac{b}{a_{n-1}} = \frac{bx}{a_{n-1}}$$

حالة ٢: $f(x) = e^{bx}$ حيث $b \neq a$

$$y_p = \frac{1}{D-a} e^{bx} = e^{ax} \int e^{-ax} e^{bx} dx = \frac{1}{b-a} e^{bx}$$

$$y_p = \frac{1}{D-a} e^{bx} = e^{ax} \int e^{-ax} e^{bx} dx = \frac{1}{b-a} e^{bx}$$

أى أن الحل الخاص ينتج بوضع b بدلا من D شرط ألا بنعدم المقام أى إذاكان $b \neq a$ مثال ٨: أوجد الحل الخاص للمعادلة $(D^2 - 3D + 5)y = e^{2x}$

بالتأثير بالمؤثر العكسي نحصل على

$$y = \frac{1}{D^2 - 3D + 5} e^{2x} = \frac{1}{4 - 6 + 5} e^{2x} = \frac{1}{3} e^{2x}$$

مثال: لإيجاد الحل الخاص للمعادلة $(D + \ln a)^2 y = a^x$

نؤثر بالمؤثر العكسي

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{(D + \ln a)^2} a^x = \frac{1}{(D + \ln a)^2} e^{x \ln a} \\ &= \frac{1}{(2 \ln a)^2} e^{x \ln a} = \frac{1}{4 \ln^2 a} a^x \end{aligned}$$

حالة ٢:

$$f(x) = e^{ax}$$

لعلاج هذه الحالة نعتبر الحالة $f(x) = e^{bx} g(x)$

$$\begin{aligned} y = \frac{1}{D-a} e^{bx} g(x) &\Rightarrow y = e^{ax} \int e^{-ax} e^{bx} g(x) dx \\ &= e^{bx} e^{(a-b)x} \int e^{-(a-b)x} g(x) dx = e^{bx} \frac{1}{D-a+b} g(x) \end{aligned}$$

أى أن

$$\frac{1}{D-a} e^{bx} g(x) = e^{bx} \frac{1}{D+b-a} g(x)$$

تسمى القاعدة السابقة قاعدة الإزاحة (The shift rule) وهى يمكننا من إزاحة دالة أسية e^{bx} مضروبة فى دالة أخرى من نطاق التأثير شريطة وضع $D+b$ بدلا من D . يمكننا بسهولة إثبات أن

$$L(D) e^{bx} g(x) = e^{bx} L(D+b) g(x)$$

مثال ٩:

لوجد الحل الخاص للمعادلة $(D^2 - 4D + 4) y = x^2 e^{2x}$ بالتأثير بالمؤثر العكسى

$$y = \frac{1}{D^2 - 4D + 4} x^2 e^{2x} = e^{2x} \frac{1}{(D+2)^2 - 4(D+2) + 4} x^2$$

$$= e^{2x} \frac{1}{D^2} x^2 = \frac{1}{12} x^2 e^{2x}$$

مثال ١٠:

أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $(D^2 - 3D + 2)y = e^{2x}$

بالتأثير بالمؤثر العكسي

$$y = \frac{1}{D^2 - 3D + 2} e^{2x} = \frac{1}{(D-2)(D-1)} e^{2x} = \frac{1}{D-2} \frac{1}{D-1} e^{2x}$$

$$= \frac{1}{D-2} \left(\frac{1}{2-1} e^{2x} \right) = e^{2x} \frac{1}{D+2-2} 1 = x e^{2x}$$

حالة ٤:

$$F(x) = \cos \omega x$$

منعتبر في هذه الحالة إيجاد الحل الخاص للمعادلة

$$(aD^2 + bD + c)y = \cos \omega x$$

أى أن

$$y = \frac{1}{aD^2 + bD + c} \cos \omega x = \operatorname{Re} \frac{1}{aD^2 + bD + c} e^{i\omega x}$$

$$= \operatorname{Re} \frac{1}{-a\omega^2 + bD + c} e^{i\omega x} = \operatorname{Re} \frac{1}{c - a\omega^2 + bD} e^{i\omega x}$$

$$= \operatorname{Re} \frac{c - a\omega^2 - bD}{(c - a\omega^2)^2 - b^2 D^2} e^{i\omega x} = \operatorname{Re} \frac{c - a\omega^2 - bD}{(c - a\omega^2)^2 + \omega^2 b^2} e^{i\omega x}$$

$$= \frac{c - a\omega^2 - bD}{(c - a\omega^2)^2 + \omega^2 b^2} \cos \omega x$$

بهذا يتحول المؤثر العكسي إلى مؤثر تفاضلى يمكن تنفيذه. الخطوات

السابقة يتم إنجازها مباشرة كالآتى. نضع ω^2 بدلا من D^2

ليتحول المؤثر العكسي إلى مؤثر على الهيئة $(D + m) / 1$. بالتأثير على

كل من البسيط والمقام بالمؤثر المرافق $D - m$ ، نحصل
 على $(\ell D - m) / (\ell^2 D^2 - m^2)$. نضع مرة أخرى ω^2 - بدلا من D^2
 ليتحول المؤثر في النهاية الى $(\ell D - m) / (-\omega^2 \ell^2 - m^2)$ وهو مؤثر
 مباشر يمكن تنفيذه .

مثال ١١:

لوجد الحل الخاص للمعادلة

$$(D^2 + 3D + 2)y = \cos 2x$$

كالمعادلة مؤثر على كلا الطرفين بالمؤثر العكسي

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{D^2 + 3D + 2} \cos 2x = \frac{1}{-4 + 3D + 2} \cos 2x \\ &= \frac{1}{3D - 2} \cos 2x = \frac{3D + 2}{9D^2 - 4} \cos 2x \\ &= -\frac{1}{40} (-6 \sin 2x + 2 \cos 2x) \end{aligned}$$

بصورة مطابقة تماما تعالج الحالة $(aD^2 + bD + c)y = \sin \omega x$

حالة ٥:

$$(D^2 + n^2)y = \cos nx \text{ or } \sin nx \quad \text{المعادلة}$$

$$(D^2 + n^2)y = \cos nx \quad \text{منعتبر الحالة}$$

$$y = \frac{1}{D^2 + n^2} \cos nx = \operatorname{Re} \frac{1}{(D - in)(D + in)} e^{inx}$$

$$= \operatorname{Re} \frac{1}{D - in} \left[\frac{1}{D + in} e^{inx} \right] = \operatorname{Re} \frac{1}{D - in} \frac{1}{2in} e^{inx}$$

$$= \operatorname{Re} e^{inx} \frac{1}{D+in-in} \left(\frac{-i}{2n} \right) = \operatorname{Re} e^{inx} \int \frac{-i}{2n} dx$$

$$= \operatorname{Re} \left(-\frac{i}{2n} x (\cos nx + i \sin nx) \right) = \frac{x}{2} \frac{\sin nx}{n},$$

بنفس الطريقة نحصل على

$$(D^2 + n^2)y = \sin nx \Rightarrow y = \frac{x}{2} \left(-\frac{\cos nx}{n} \right).$$

٦-٥ طريقة المعاملات غير المعينة

(Undetermined Coefficients)

هي واحدة من الطرق التي تعالج مسائل بسيطة ومن مميزاتها
اعتمادها على التفاضل بدلا من التكامل. نوضح هذه الطريقة بإيجاد الحل
الخاص للمعادلة

$$y'' - 2y' + 3y = 12e^{3x}$$

حيث أن مشتقة دالة أسية تبقى الدالة الأسية كما هي وتحدث تغييرا
في حدود المعامل على الأكثر من ثم يمكن أن نفرض حلا على
الهيئة $y_p = Ae^{3x}$ بالتعويض في المعادلة

$$9Ae^{3x} - 6Ae^{3x} + 3Ae^{3x} = 12e^{3x} \Rightarrow A = 2$$

لأن $y_p = 2e^{3x}$ هو حل خاص للمعادلة المعطاة.

إذا وضعنا $\cos 3x$ بدلا من $12e^{3x}$ في المعادلة التفاضلية السابقة

$$y'' - 2y' + 3y = \cos 3x$$

وافتراضنا حلا خاصا $y = A \cos 3x$. بالتعويض في المعادلة نرى أن

$$-6 A \cos 3x + 6 A \sin 3x = \cos 3x$$

وحيث أن $\cos 3x$, $\sin 3x$ دالتان مستقلتان بالتالى لا يمكن أن نتحقق المعادلة السابقة وهو ما يؤدي إلى وجوب إعادة فرض حل ندخل فيه حدا جديدا وهو

$$y_p = A \cos 3x + B \sin 3x$$

المثال السابق يقودنا إلى طريقة إيجابية بموجبها يمكن أن نفرض هيكلا للحل الخاص.

قاعدة:

إذا كان التفاضل المتكرر لدالة $f(x)$ يؤدي إلى عدد منتهى من الدوال المستقلة خطيا من الممكن أن تكون على هيئة تركيب خطى فإن الحل الخاص y_p للمعادلة التفاضلية

$$(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n) y = f(x)$$

يمكن إيجاد بطريفة المعاملات غير المعينة.

بشكل عام نتبع الأسلوب التالى:

١ - نفرض حلا y_p على هيئة تركيب خطى اختياري من $f(x)$

والدوال المستقلة خطيا التى تظهر فى تكرار مشتقاتها.

٢ - بالتعويض عن y_p فى المعادلة التفاضلية.

٣ - لحدد الثوابت الاختيارية فى y_p من التساوى للتطابق الناتج

من التعويض.

فصول الدوال التي تؤدي هي ومشتقاتها إلى عدد منتهى من الدوال
المستقلة خطياً هي:

$$k, x^n (n \text{ a positive integer}), e^{kx}, \cos kx, \sin kx$$

والدوال الناتجة منها بعمليات منتهية من الجمع والطرح والضرب.
إذا كانت $f(x)$ مجموع منتهى من الدوال لكل منها خاصية أنها
ومشتقاتها تؤدي إلى ظهور عدد منتهى من الدوال المستقلة خطياً لمكن
إيجاد حل المعادلة بطريقتين. إما أن نعالج $f(x)$ جملة أو بحل المعادلة مع
كل حد من حدود الجمع ثم نستخدم خاصية تجميع الحدود في حالة
المؤثرات الخطية.

مثال ١٢:

لحل المعادلة التفاضلية

$$(D^2 - 3D + 2)y = x^2 + 2x + 3$$

نفرض حلاً خاصاً على الهيئة $y_p = a + bx + cx^2$

$$(D^2 - 3D + 2)y_p = 2c - 3(2cx + b) + 2(a + bx + cx^2)$$

$$= x^2 + 2x + 3$$

بمساواة المعاملات المتناظرة نحصل على

$$1 = 2c, \quad 2 = 2b - 6c, \quad 3 = 2c - 3b + 2a$$

من ثم

$$c = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{5}{2}, \quad a = \frac{19}{4}$$

أى أن الحل الخاص

$$y_p = \frac{1}{4} (19 + 10x + 2x^2)$$

الحل المتمم

$$y = Ae^x + Be^{2x}$$

الحل العام

$$y = Ae^x + Be^{2x} + \frac{1}{4} (19 + 10x + 2x^2)$$

نعرض الآن لمعادلات تفاضلية ذات معاملات متغيرة يمكن تحويلها إلى معادلات ذات معاملات ثابتة.

٦-٦ المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة

هذه معادلات بالهيئة

$$(a_0 x^n D^n + a_1 x^{n-1} D^{n-1} + \dots + a_n) y = f(x)$$

حيث $\{a_i\}$ ثوابت. نستخدم كلمة متجانسة هنا فى غير المعنى الذى ورد ذكره سابقا حيث التجانس هنا يعنى معاواة قوة x مع رتبة D فى كل حد من المعادلة. تسمى هذه المعادلات أيضا معادلات لويبار أو المعادلات متكافئة البعد (Equidimensional Equations). يمكن تحويل هذه المعادلات التفاضلية إلى معادلات تفاضلية ذات معاملات ثابتة بالتعويض التالى

$$x = e^t = \frac{dx}{dt} = e^t = x$$

هذا التعويض يؤدي إلى

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow x Dy = \theta y$$

حيث $\theta = \frac{d}{dt}$ بينما D كالمعتاد تقوم مقام $\frac{d}{dx}$
بالإستمرار بهذه الطريقة نحصل على المتساويات التفاضلية الآتية:

$$xD = \theta, x^2 D^2 = \theta(\theta-1), x^3 D^3 = \theta(\theta-1)(\theta-2) \dots$$

$$x^n D^n = \theta(\theta-1) \dots (\theta-n+1)$$

من ثم نحول المعادلة التفاضلية من معادلة تفاضلية ذات معاملات

متغيرة في D إلى معادلة تفاضلية ذات معاملات ثابتة في θ

إذا كانت المعادلة بالبيئة

$$[a_0 (bx+c)^n D^n + a_1 (bx+c)^{n-1} D^{n-1} + \dots + a_n] y = f(x)$$

فإن التعويض $bx+c = e^z$ يؤدي إلى التكافؤ التفاضلية الآتية:

$$(bx+c) D = b\theta, (bx+c)^2 D^2 = b^2 \theta(\theta-1),$$

$$(bx+c)^3 D^3 = b^3 \theta(\theta-1)(\theta-2), \dots$$

مثال ١٣:

الحل للمعادلة التفاضلية

$$(x^3 D^3 + 3x^2 D^2 + xD + 8) y = 65 \cos (\ln x)$$

نضع $x = e^t$ لتتحول المعادلة إلى

$$[\theta(\theta-1)(\theta-2) + 3\theta(\theta-1) + \theta + 8] y = 65 \cos t$$

$$\text{or } (\theta^3 + 8) y = 65 \cos t$$

$$\theta^3 + 8 = 0 \Rightarrow \theta = -2, 1 \pm \sqrt{3}i$$

الحل المتمم

$$y_c = Ae^{-2t} + e^t (B \cos \sqrt{3} t + C \sin \sqrt{3} t)$$

الحل الخاص

$$\ddot{y}_p = \frac{1}{\theta^2 + 8} 65 \cos t = \frac{1}{8 - \theta} 65 \cos t = \frac{8 + \theta}{64 - \theta^2} 65 \cos t$$

$$y_p = 8 \cos t - \sin t$$

الحل العام

$$y = Ae^{-2t} + e^t (B \cos \sqrt{3} t + C \sin \sqrt{3} t) + 8 \cos t - \sin t$$

$$= \frac{A}{x^2} + x [B \cos (\sqrt{3} \ln x) + C \sin (\sqrt{3} \ln x)] +$$

$$+ 8 \cos (\ln x) - \sin (\ln x)$$

مثال ١٤:

حل المعادلة التفاضلية

$$[(2x+1)^2 D^2 + 4(2x+1)D + 1]y = 8x^2$$

نضع $2x+1 = e^t$ لتتحول المعادلة التفاضلية إلى

$$[4\theta(\theta-1) + 4(2\theta) + 1]y = 2[e^t - 1]^2$$

$$\text{or} \quad (4\theta^2 + 4\theta + 1)y = 2e^{2t} - 4e^t + 2$$

الحل المتعم

$$y_c = (A+Bt) e^{-t/2} = [A+B \ln(2x+1)] e^{-1/2 \ln(2x+1)}$$

$$= \frac{A+B \ln(2x+1)}{\sqrt{(2x+1)}}$$

الحل الخاص

$$y_p = \frac{1}{(2x+1)^2} 2e^{2t} - 4e^t + 2 = \frac{2}{25} e^{2t} - \frac{4}{9} e^t + 2$$

الحل العام

$$y = \frac{[A+B \ln(2x+1)]}{\sqrt{2x+1}} + \frac{2}{25} (2x+1)^2 - \frac{4}{9} (2x+1) + 2$$

تمارين

- 1- $(D^2 - 4D - 21)y = 0$
- 2- $(D - 2)^3 (D + 1)y = 0$
- 3- $(D^4 - 3D^3 + 3D^2 - 3D + 2)y = 0$
- 4- $(D^2 + 1)^2 y = 0$
- 5- $(D^3 - 4D^2 + 13D)y = 1 + \cos 2x$
- 6- $(D^2 - 4D - 21)y = e^{-3x}$, $y(0) = y'(0) = 0$
- 7- $(D^2 + 6D + 9)y = 27(1 - x^2)$
- 8- $(D^2 + 2D + 2)y = 8(1 + x + x^2) + \sin 2x$
- 9- $(D^3 - 3D^2 + D - 3)y = 20 \cos x + 9x$
- 10- $(D^2 - 2D + 5)y = e^x \cos^2 x$
- 11- $(2D^2 - 3D + 1)y = \sinh x$
- 12- $(D^2 + 4D + 4)y = 8x^2 + e^{-x} \sin x$
- 13- $(2D^2 + D - 1)y = 8 \sinh x + 4 \cosh x$
- 14- $(D^2 - 2\lambda D + \lambda^2)y = x$

١٥ - إذا كانت $(D^3 - D + 1)y = 1$ وكان $y(0) = y(\pm a) = 0$

فثبت أن

$$y = a \left(\frac{\sinh x}{\sinh a} - \frac{x}{a} \right)$$

حل المعادلات التفاضلية الآتية:

$$16 - (x^2 D^2 - 2xD + 2)y = (x+1)^2, \quad y(1) = \frac{3}{2}, \quad y(e) = 1/2$$

$$17 - (x^2 D^4 - 3xD + 4)y = x^2 + \ln x$$

$$18 - (x^3 D^3 + xD + 1)y = x^3$$

$$19 - xy'' - \frac{1}{x}y = x \ln x$$

$$20 - (y'' - \frac{1}{x}y' - \frac{3}{x^2}y) = x^2 + 10$$

٢١ - حول المعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 3 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = (2x - y) \left(\frac{dy}{dx} \right)^3$$

حيث يصبح y هو المتغير المستقل بينما x هو المتغير التابع من ثم

حل المعادلة الناتجة

$$٢٢ - إذا كانت $p(D)$ كثيرة حدود في $D = \frac{d}{dx}$ فثبت أن$$

$$(i) (D-a)^2 f(x) = e^{ax} D^2 e^{-ax} f(x)$$

$$(ii) p(D) e^{ax} = p(a) e^{ax}$$

والتي نقودنا إلى

$$\frac{1}{p(D)} e^{ax} = \frac{1}{p(a)} e^{ax}$$

ما لم تكن

$$p(a) = 0$$

$$(iii) \quad p(D) e^{ax} v = e^{ax} p(D+a) v$$

٢٣ - إذا كانت $p(D) = (D-a)^r \phi(D)$ حيث $\phi(a) \neq 0$ فإن
 استخدام قاعدة الإزاحة في المسألة السابقة يمكن أن نقودنا إلى

$$\begin{aligned} \frac{1}{p(D)} e^{ax} &= \frac{1}{(D-a)^r \phi(D)} e^{ax} = \frac{1}{(D-a)^r} \frac{1}{\phi(D)} e^{ax} \\ &= \frac{e^{ax}}{\phi(D)} \frac{1}{D^r} 1 \end{aligned}$$

$$\phi(D^2) \cos \omega x = \phi(-\omega^2) \cos \omega x \quad \text{٢٤ - إثبت أن}$$

٢٥ - إذا كانت v دالة من x فإثبت أن

$$(i) \quad D^n(xv) = D^n v + n D^{n-1} v$$

$$(ii) \quad p(D)(xv) = xp(D)v + p'(D)v$$

ومن ثم فإن ما بقودنا إلى

$$\frac{1}{p(D)} xv = \left(x - \frac{1}{p(D)} p'(D) \right) \frac{1}{p(D)} v$$

$$\frac{1}{p(D)} x^n v = \left(x - \frac{1}{p(D)} p'(D) \right)^n \frac{1}{p(D)} v$$

$$٢٦ - \text{إثبت أن } (\cos ax - \cos(a+h)x) / [(a+h)^2 - a^2] =$$

هو حل المعادلة

$$(D^2 + a^2)y = \cos(a+h)x$$

من ثم استنتج حل المعادلة

$$(D^2 + a^2)y = \cos ax$$

المعادلات التفاضلية ذات المعاملات المتغيرة .

**Ordinary differential equations
with variable coefficients**

معادلات تفاضلية ذات معاملات متغيرة

طرق مختلفة لحل معادلات من الرتبة الثانية أو أعلى

سوف نعالج في هذا الباب بشكل أسامى طرق إختزال رتبة معادلة

تفاضلية. سوف نوضح أنه يمكن إختزال رتبة معادلة إذا:

(١) لم تحتوى y صراحة.

(٢) لم تحتوى x صراحة.

سوف نعالج حلول المعادلات التفاضلية الخطية خلاف تلك التى تم

علاجها فى باب سابق. سوف نوضح أيضا أن رتب هذه المعادلات يمكن

إختزالها إذا:

(٣) أمكن تحليل المؤثر.

(٤) أمكن معرفة أحد حلول المعادلة المتممة.

يولكب الطريقة الأخيرة والتي تبلى على إستبدال المتغير التابع

طريقتين أخريتين إحداهما تركز أيضا على إستبدال المتغير التابع وهى

طريقة الإختزال للصيغة القياسية والأخرى تركز على إستبدال المتغير

المستقل.

نعرض كذلك حل المعادلات التفاضلية التى يمكن معرفة حلها المتم

بطريقة تغيير البارامترات. هذه الطريقة تحتاج جهد كبير فى حلول

معادلات أنية وكذلك إجراء التكاملات عند تطبيقها على معادلات تفاضلية

من رتب أعلى من الثالثة.

٧-١ معادلات خالية من y

إذا لم يظهر الحد y صراحة فى المعادلة التفاضلية نضع $\frac{dy}{dx} = p$

من ثم $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$ وهكذا. تختزل المعادلة بهذه الطريقة رتبة واحدة.
إذا لم يظهر كل من $\frac{dy}{dx}$ ، y صراحة في المعادلة نضع $\frac{d^2y}{dx^2} = p$
لنختزل رتبة المعادلة التفاضلية رتبتين .

مثال ١:

$$\text{لحل المعادلة } y'' \sin x + 2y' \cos x = 1 \text{ نضع } \frac{dy}{dx} = p$$

لتصبح المعادلة بعد القسمة على $\sin x$ خطية من الرتبة الأولى

$$p' + 2p \cot x = \operatorname{cosec} x$$

$$\mu = e^{\int 2 \cot x dx} = \sin^2 x$$

$$p \sin^2 x = \int \sin^2 x \operatorname{cosec} x dx = A - \cos x$$

$$\frac{dy}{dx} = p = A \operatorname{cosec}^2 x - \operatorname{cosec} x \cot x$$

$$y = -A \cot x + \operatorname{cosec} x + B$$

٧-٢ معادلات خالية من x

إذا خلت المعادلة صراحة من x نضع $\frac{dy}{dx} = p$ ثم نحول

المشتقات الأعلى إلى مشتقات p بالنسبة إلى y . مثلاً $\frac{d^2y}{dx^2} = p \cdot \frac{dp}{dy}$
بهذا تختزل المعادلة التفاضلية إلى معادلة تفاضلية أقل رتبة في py .

مثال ٢:

$$\text{لحل المعادلة التفاضلية } yy'' + y'^2 = y'$$

$$\text{نضع } y' = p, \quad y'' = p \frac{dp}{dy} \text{ . لنحول المعادلة إلى}$$

$$yp \frac{dp}{dy} + p^2 = p \Rightarrow \frac{dp}{1-p} = \frac{dy}{y} \Rightarrow -\ln(1-p) = \ln \frac{y}{A}$$

$$\Rightarrow 1-p = \frac{A}{y} \Rightarrow p = \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{A}{y} \Rightarrow (1 + \frac{A}{y-A}) dy = dx$$

$$1.e. \quad y + A \ln(y-A) = x + c$$

$$\text{or} \quad y = A + B e^{(x-y)/A}$$

مثال ٣:

لحل المعادلة التفاضلية $y'' = \frac{1}{y^2} f(y)$ والتي كثيرا ما تظهر عند دراسة حركة جسم مؤثر عليه بقوة متجهة إلى نقطة ثابتة وتعتمد قيمتها على البعد عن هذه النقطة، نقوم بضرب طرفي المعادلة في $2y'$ ثم التكامل بالنسبة إلى x .

$$2y'y'' = f(y) \frac{dy}{dx} = y'^2 = \int f(y) \frac{dy}{dx} dx = \int f(y) dy.$$

٣-٧ تحليل المؤثر (Factorisation of the Operator)

طريقة تحليل المؤثر (إن أمكن التحليل) تعطى نتائج طيبة ولكنها من الصعوبة بمكان حيث أن التحليل قد لا يكون وحيدا. على سبيل المثال

$$(D^2 - 1)y = (D+1)(D-1)y = (D + \tanh x)(D - \tanh x)y$$

ليس هذا فقط بل أن عوامل تحليل مؤثر ليست بالضرورة إبدالية و عليه يجب التأكد من أن التحليل يؤدي إلى المعادلة التفاضلية المعطاة: على سبيل المثال

$$y'' + (x + \frac{1}{x})y' + 2y = (\frac{d}{dx} + \frac{1}{x})(\frac{d}{dx} + x)y = (\frac{d}{dx} + x)(\frac{d}{dx} + \frac{1}{x})y$$

إذا أمكن تحليل مؤثر المعادلة التفاضلية $F(D)y = f(x)$

إلى $F(D) = \phi(D) \psi(D)$ فإنه يوضع $\psi(D)y = v$ يتحول حل المعادلة التفاضلية إلى حل معادلتين تفاضليتين بالتتابع كلتاهما ذات رتبة أقل من رتبة $F(D)$ ومجموع رتبتهما تساوى رتبة $F(D)$

مثال 4:

تحلل المعادلة التفاضلية

$$(x^2 D^2 + x(4+3x)D + 9x)y = 4xe^x$$

إلى

$$(xD+3x)(xD+3)y = 4xe^x$$

يوضع $(xD+3)y = v$ نحصل على

$$(xD+3x)v = x(D+3)v = 4xe^x$$

$$\text{i.e. } v = \frac{1}{D+3} 4e^x = e^x + Ae^{-3x}$$

من ثم

$$(xD+3)y = e^x + Ae^{-3x} \rightarrow \frac{dy}{dx} + \frac{3}{x}y = (e^x + Ae^{-3x})/x$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية، معاملها المكامل يساوى

$$\mu = e^{\int 3/x dx} = x^3$$

حل المعادلة التفاضلية ينتج من

$$x^3 y = \int x^3 \frac{1}{x} (e^x + Ae^{-3x}) dx = e^x (x^2 - 2x + 2)$$

$$+ Ae^{-3x} (9x^2 + 6x + 2) + B$$

$$\text{i.e. } y = x^{-3} \{e^x (x^2 - 2x + 2) + Ae^{-3x} (9x^2 + 6x + 2) + B\}$$

يمكن إختزال رتبة المعادلة التفاضلية

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

حيث

$$f(x, ty, ty', \dots, ty^{(n)}) = t^k f$$

بأستخدام التعويض $y' = yz$

في هذه الحالة

$$y' = yz \Rightarrow y'' = y(z^2 + z'), y''' = y(z'' + 3zz' + z'^2), \dots$$

مثال: لحل المعادلة التفاضلية

$$x^2 y y'' = (y - xy')^2$$

نضع $y' = yz$

$$y' = yz \Rightarrow x^2 y^2 (z' + z^2) = y^2 (1 - xz)^2 \Rightarrow z' + z^2 = \left(\frac{1}{x} - z\right)^2$$

$$\Rightarrow z' + \frac{2}{x}z = \frac{1}{x^2} \Rightarrow z = (x + A) / x^2 = y' / y$$

$$\Rightarrow \ln \frac{y}{B} = \ln x - \frac{A}{x}$$

$$\Rightarrow y = Bx e^{-A/x}$$

٧-٥ معرفة أحد حلول الدالة المتممة

يمكن إنقاص رتبة معادلة تفاضلية خطية بمقدار وحدة دون المساس بخطية المعادلة عند معرفة أحد حلول معادلتها المختزلة. مثلاً عند معرفة أحد حلول المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة

$$y'' + p(x) y' + Q(x) y = 0$$

ولكن $y = u$ يمكن إيجاد الحل العام للمعادلة

$$y'' + p(x) y' + Q(x) y = R(x)$$

باستخدام التعويض $y = uv$ حيث تختزل المعادلة التفاضلية إلى معادلة من الرتبة الأولى

$$y = uv \Rightarrow y' = uv' + u'v, y'' = uv'' + 2u'v' + u''v$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية نحصل على

$$uv'' + v'(2u' + pu) + v(u'' + pu' + Q) = R$$

حيث ينعدم معامل v لأن u تحقق الدالة المتممة ومن ثم تتحول المعادلة التفاضلية إلى

$$u \frac{dv'}{dx} + (2u' + pu) v' = R$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى في v' .

مثال ٥:

$$y'' + y' + e^{-2x} y = e^{-3x} \quad \text{سنوجد حل المعادلة}$$

إذا كان $y = \cos e^{-x}$ أحد حلول المعادلة المختزلة.

نتحقق أولاً من أن $y = \cos e^{-x}$ تحقق المعادلة المختزلة

$$y' = e^{-x} \sin(e^{-x}), \quad y'' = -e^{-2x} \cos(e^{-x}) - e^{-x} \sin e^{-x}$$

بالتعويض في المعادلة المختزلة

$$\begin{aligned} & -e^{-2x} \cos(e^{-x}) - e^{-x} \sin(e^{-x}) + e^{-x} \sin(e^{-x}) \\ & + e^{-2x} \cos e^{-x} = 0 \end{aligned}$$

نفرض حلاً عاماً للمعادلة الأولى بالصيغة $y = (\cos e^{-x}) v$

$$y' = \cos e^{-x} v' + e^{-x} \sin(e^{-x}) v$$

$$y'' = \cos e^{-x} v'' + 2e^{-x} \sin(e^{-x}) v'$$

$$+ v(-e^{-2x} \cos e^{-x} - e^{-x} \sin e^{-x})$$

بالتعويض في المعادلة والاختصار نحصل على

$$v'' \cos e^{-x} + (2e^{-x} \sin e^{-x} + \cos e^{-x}) v' = e^{-2x}$$

$$\text{i.e.,} \quad v'' + (2e^{-x} \tan e^{-x} + 1) v' = e^{-2x} / \cos e^{-x}$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى في v . المعامل المكامل μ

$$\mu = e^{\int (2e^{-x} \tan e^{-x} + 1) dx} = e^{-2 \ln \sec e^{-x} + x} = e^x \cos^2 e^{-x}$$

$$v' e^x \cos^2 e^{-x} = \int e^x \cos^2 e^{-x} \frac{e^{-2x}}{\cos e^{-x}} dx = \int e^{-2x} \cos e^{-x} dx$$

$$= - \int e^{-x} \cos e^{-x} d e^{-x} = - e^{-x} \sin e^{-x} + \cos e^{-x} + A$$

$$v' = e^{-2x} \sec e^{-x} \tan e^{-x} + e^{-x} \sec e^{-x} + A e^{-x} \sec^2 e^{-x}$$

$$v = - \int (e^{-x} \sec e^{-x} \tan e^{-x} + \sec e^{-x} + A \sec^2 e^{-x}) d e^{-x}$$

$$e^{-x} = z \quad \text{بوضع}$$

$$v = - \int (z \sec z \tan z + \sec z + A \sec^2 z) dz$$

$$= - \int z d \sec z - \int \sec z dz + A \sec^2 z) dz$$

$$= - z \sec z + \int \sec z dz - \int \sec z dz + A \tan z + B$$

$$= - e^{-x} \sec e^{-x} + A \tan e^{-x} + B$$

يمكن إيجاد الحل العام لمعادلة تفاضلية بهيئة تكامل كما يوضح المثال

التالى:

مثال ٦:

.. إثبت أن e^{x^2} تحقق المعادلة المختزلة للمعادلة

$$y'' - 2x y' - 2y = 6x^2$$

ومن ثم أوجد المعادلة المعطاه .

الحل:

بالتعويض عن $y = e^{x^2}$ فى المعادلة المختزلة

$$y = e^{x^2}, y' = 2x e^{x^2}, y'' = 4x^2 e^{x^2} + 2 e^{x^2}$$

$$y'' - 2xy' - 2y = e^{x^2} [4x^2 + 2 - 4x^2 - 2] = 0$$

لإيجاد الحل العام للمعادلة غير المختزلة نفرض الحل بالهيئة $y = e^{x^2} v$

$$y' = e^{x^2} (v' + 2xv), \quad y'' = e^{x^2} (v'' + 3xv' + 4x^2 v + 2v)$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية

$$e^{x^2} (v'' + 4xv' + 4x^2 v + 2v - 2xv' - 4x^2 v - 2v) = 6x^2$$

$$\rightarrow v'' + 2xv' = 6x^2 e^{-x^2}$$

المعادلة الأخيرة خطية من الرتبة الأولى في v

$$\mu = e^{\int 2x dx} = e^{x^2}$$

$$v' e^{x^2} = \int e^{x^2} 6x^2 e^{-x^2} dx = 2x^3 + A$$

$$v' = 2x^3 e^{-x^2} + A e^{-x^2}$$

$$v = \int 2x^3 e^{-x^2} dx + A \int e^{-x^2} dx + B$$

$$= -x^2 e^{-x^2} - e^{-x^2} + A \int e^{-x^2} dx + B$$

المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية من أكثر المعادلات شيوعا

في رياضيات الفيزياء، سوف نوجد صيغة يمكن من خلالها إيجاد حل ثان

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x) y = 0 \quad \text{لمعادلة تفاضلية متجانسة بالهيئة}$$

مستقل خطيا عن حل معلوم لها.

سوف نوضح أيضا من خلال هذه الصيغة أن رونسكين على معادلة
تفاضلية متجانسة من الرتبة الثانية يمكن حسابه من بارامترات المعادلة
التفاضلية (الدالة $p(x)$).

نفرض أن y_1, y_2 حلان مستقلان للمعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x) y = 0$$

$$i.e. \quad y_1'' + p y_1' + q y_1 = 0 \quad (1)$$

$$y_2'' + p y_2' + q y_2 = 0 \quad (2)$$

بضرب (1) في y_2 وضرب (2) في y_1 ثم الطرح نحصل على

$$y_1 y_2'' - y_2 y_1'' + p (y_1 y_2' - y_2 y_1') = 0$$

ولكن

$$W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

$$\Rightarrow \frac{dW}{dx} = y_1 y_2'' - y_2 y_1''$$

من ثم

$$\frac{dW}{dx} + p W = 0$$

$$W = A e^{-\int p dx}$$

مع ملاحظة أن $e^{-\int p dx}$ لا يمكن أن يساوى الصفر بالتالى فإن $W \neq 0$

طالما $A \neq 0$

حيث أن

$$W = y_1^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{y_2}{y_1} \right)$$

من ثم

$$y_1^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{y_2}{y_1} \right) = e^{-\int p dx}$$

$$\therefore y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p dx}}{y_1^2} dx$$

مثال ٧:

لإيجاد الحل العام للمعادلة $x^2 y'' + xy' - 4y = 0$ مع العلم بأن $y = x^2$ أحد حلولها، نوجد الحل لثنتي

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 \int \frac{e^{-\int p dx}}{y_1^2} dx = x^2 \int \left(\frac{1}{x^4} \int e^{-\int p dx} dx \right) dx \\ &= x^2 \int \frac{1}{x^4} \cdot \frac{1}{x} dx = -\frac{1}{4x^2} \end{aligned}$$

الحل العام

$$y = Ax^2 + \frac{B}{x^2}$$

٧-٦ الاختزال للصيغة القياسية

(Reduction to Canonical or Normal Form)

تبنى هذه الطريقة على اختزال المعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + Q(x) y = R(x)$$

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + S(x) v = T(x)$$

وذلك باستبدال المتغير التابع y بمتغير تابع v بالتعويض $y = uv$ بحيث يؤدي اختيار الدالة u إلى حذف الحد الثاني من المعادلة. تكون هذه الطريقة إيجابية فقط إذا أمكن حل المعادلة التفاضلية الأخيرة (كأن تكون الدالة $S(x)$ ثابتة أو بالهيئة $S(x) = \frac{A}{(ax+b)^2}$). نعود لكيفية إيجاد الدالة u

$$y = uv, y' = uv' + u'v, y'' = uv'' + 2u'v' + u''v$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية نحصل على

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \left(\frac{2}{u} \frac{du}{dx} + P \right) \frac{dv}{dx} + \frac{1}{u} \left(-\frac{d^2 u}{dx^2} + P \frac{du}{dx} + Qu \right) v = R/u$$

لحذف الحد الثاني نختار u بحيث

$$\frac{2}{u} \frac{du}{dx} + P = 0$$

$$1. e. \quad u = e^{-1/2 \int P(x) dx}$$

مثال ٨:

لحل المعادلة التفاضلية

$$y'' + 2y' \tan x + 2y \tan^2 x = \cos^2 x$$

نضع $y = uv$ حيث

$$u = e^{-1/2 \int P dx} = e^{-1/2 \int 2 \tan x dx} = \cos x$$

$$y = v \cos x, y' = v' \cos x - v \sin x$$

$$y'' = v'' \cos x - 2 v' \sin x - v \cos x$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية

$$v'' \cos x - 2v' \sin x - v \cos x + 2 \tan x (v' \cos x - v \sin x)$$

$$+ 2 \tan^2 x (v \cos x) = \cos^2 x$$

$$\text{i.e. } v'' \cos x - v \cos x = \cos^2 x \Rightarrow v'' - v = \cos x$$

$$\text{or } (D^2 - 1) v = \cos x$$

الحل المتمم

$$v_c = A e^{-x} + B e^x$$

الحل الخاص

$$v_p = \frac{1}{D^2 - 1} \cos x = -\frac{1}{2} \cos x$$

الحل العام للمعادلة الأصلية

$$y = uv = \cos x (A e^{-x} + B e^x - \frac{1}{2} \cos x)$$

$y = v$ إستبدال المتغير المستقل

بإستخدام التحويل $t = f(x)$ وإجراء المشتقات

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dt^2} \left(\frac{dt}{dx} \right)^2 + \frac{dy}{dt} \frac{d^2 t}{dx^2}$$

ثم بالتعويض في المعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x) \frac{dy}{dx} + Q(x) y = R(x)$$

نحصل على

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\frac{d^2t}{dx^2} + P \frac{dt}{dx}}{\left(\frac{dt}{dx}\right)^2} \left(\frac{dy}{dt}\right) + \frac{Qy}{\left(\frac{dt}{dx}\right)^2} = \frac{R}{\left(\frac{dt}{dx}\right)^2}$$

إذا اخترنا $\frac{dt}{dx} = \sqrt{\pm Q/a^2}$ بحيث $f(t)$ تختار الإشارة التي تؤدي إلى أن يكون $\frac{dt}{dx}$ حقيقياً وبختار الثابت a^2 بشكل مناسب) وكان معامل الحد الأوسط ثابتاً، تتحول المعادلة التفاضلية إلى معادلة ذات معاملات ثابتة (المعامل التي تعالج بهذه الطريقة وبطريقة التحويل إلى الصيغة القياسية غالباً ما تكون مصطنعة).

مثال ٩:

لحل المعادلة

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{1+4x^2}{x}\right) \frac{dy}{dx} - 12x^2y = 40x^2 \sin x^2$$

نختار وضع $t = f(x)$ حيث

$$\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 = \frac{-Q}{a^2} = \frac{12x^2}{3} = 4x^2$$

$$i.e. \quad \frac{dt}{dx} = 2x = t = x^2$$

من ثم

$$\left(\frac{d^2 t}{dx^2} + p \frac{dt}{dx} \right) / \left(\frac{dt}{dx} \right)^2 = \left[2 + 2x \left(-\frac{1+4x^2}{x} \right) \right] / 4x^2 = -2$$

بذا تتحول المعادلة التفاضلية إلى

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - 2 \frac{dy}{dt} - 3y = 10 \sin t$$

$$\text{i.e., } y = A e^{3t} + B e^{-t} + \cos t - 2 \sin t$$

$$= A e^{3x^2} + B e^{-x^2} + \cos x^2 - 2 \sin x^2$$

٧-٨ استبدال المتغير التابع

قد يؤدي استبدال المتغير التابع $y = u(x)$ باختيار مناسب

لدالة $u(x)$ إلى تبسيط المعادلة التفاضلية (الحل عن طريقة الاختزال

لصيغة القياسية وكذلك معرفة أحد حلول الدالة المتممة هو من قبيل

استبدال المتغير التابع). منوضح الطريقة بالأمثلة

مثال ١٠:

استخدم التعويض $y = z/\sqrt{x}$ لحل للمعادلة التفاضلية

$$4xy'' + 4xy' + (4x^2 - 1)y = 0$$

نحول المعادلة المعطاه إلى معادلة في z

$$y = z/\sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{x}} \left[z' - \frac{z}{2x} \right], \quad y'' = \frac{1}{\sqrt{x}} \left[z'' - \frac{z'}{x} + \frac{3}{4} \frac{z}{x^2} \right]$$

من ثم نحصل على

$$z'' + z = 0 \Rightarrow z = A \cos x + B \sin x$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}} [A \cos x + B \sin x]$$

٧-٢ تغيير البارامترات (Variation of Parameters)

يمكن تبسيط المعادلة

$$Ly = (D^2 + P(x) D + Q(x)) y = f(x) \quad a < x < b \quad (1)$$

بالتعويض $y = y_1 v$ حيث y_1 يحقق المعادلة المختزلة $Ly = 0$. إذا علم حلين مستقلين للمعادلة المختزلة y_1, y_2 فإن التعويض

$$y = y_1 v_1 + y_2 v_2 \quad (2)$$

يؤدى إلى تبسيط أكثر كما ستوضح الآن. نتقبله طريقة تغيير البارامترات مع طريقة المعاملات غير المعينة فى ماعدا أن المجاهيل فى الحالة الأولى هى دوال v_1, v_2 أكثر منها ثوابت.

نفرض أن $f(x)$ دالة متصلة فى الفترة $a \leq x \leq b$ وأن $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ هو حل للمعادلة $Ly = 0$. نحصل على التعبير (2) باستبدال البارامترات الثابتة c_1, c_2 بدوال v_1, v_2 ومن هنا سميت الطريقة طريقة تغيير البارامترات. عند التعويض بالدالة $y = v_1 y_1 + v_2 y_2$ فى المعادلة التفاضلية $Ly = f(x)$ نحصل على الشرط الواجب توافره على الدالتين v_1, v_2 . حتى تمثل (2) الحل العام للمعادلة (1). سوف نضع أيضا شرطاً آخر على v_1, v_2 يؤدى إلى تبسيط حسابهما بالتفاضل

$$y' = (v_1 y_1' + v_2 y_2') + (v_1' y_1 + v_2' y_2)$$

حساب y'' سوف يبعث بشكل كبير إذا لم نعد القوس الثانى فى حساب y'

$$\text{i.e. } v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0 \quad (3)$$

من ثم

$$y' = v_1 y_1' + v_2 y_2'$$

$$y'' = v_1 y_1'' + v_2 y_2'' + v_1' y_1' + v_2' y_2'$$

التعويض في المعادلة الأولى وإعادة الترتيب يؤدي إلى

$$v_1 (y_1'' + p y_1' + q y_1) + v_2 (y_2'' + p y_2' + q y_2) + v_1' y_1' + v_2' y_2' = f(x)$$

حيث أن y_1, y_2 يحققان المعادلة المختزلة من ثم نحصل على

$$v_1' y_1' + v_2' y_2' = f(x) \quad (4)$$

بحل المعادلتين (3), (4) نحصل على

$$v_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}, \quad v_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}$$

للمحدد في المقام هو رونسكين (Wronskian) للدالتين y_1, y_2 ويرمز له بالرمز $W(y_1, y_2)$ (إذا كانت قيمة رونسكين مجموعة من الدوال معاديا الصفر كانت الدوال مرتبطة خطيا وإلا فهي مستقلة خطيا). بالتكامل

نحصل على v_1, v_2 ومن ثم y

$$y = y_1 \int \frac{-f y_2}{W(y_1, y_2)} dx + y_2 \int \frac{f y_1}{W(y_1, y_2)} dx \quad (5)$$

حيث أن ثوابت التكامل تصيف حدا بالهينة $C_1 y_1 + C_2 y_2$ من ثم فإن الصيغة (5) تمثل الحل العام للمعادلة $Ly = f$

مثال ١١:

لحل المعادلة التفاضلية $(D^2 - 1)y = 2/(1 + e^x)$

نبدأ بحل المعادلة المختزلة $(D^2 - 1)y = 0$ وهو $y = A_1 e^{-x} + B_1 e^{+x}$

$$W(e^{-x}, e^x) = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^x \\ -e^{-x} & e^x \end{vmatrix} = 2$$

الحل العام يساوى

$$y = e^{-x} \int \frac{2 e^x}{2 (1 + e^x)} dx + e^x \int \frac{2 e^{-x}}{2 (1 + e^x)} dx$$

$$= e^{-x} [\ln (1 + e^x) + A] + e^x [-e^{-x} - x + \ln (1 + e^x) + B]$$

يمكن تعميم طريقة تغيير البارامترات التى لينكرها لاجرائج لمعادلات خطية عامة.

$$[a_0(x) D^n + a_1(x) D^{n-1} + \dots + a_n(x)] y = f(x)$$

ومنعرض باختصار كيف يتم هذا التعميم.

نفرض أن $C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$ هو الحل المتمم للمعادلة المتجانسة المولدة للمعادلة المعطاة. نفرض حلا عاما للمعادلة المعطاه بالهينة

$$y = v_1 y_1 + v_2 y_2 + \dots + v_n y_n$$

حيث $v_i \in \mathbb{R}$ دوال مجهولة. نحصل على هذه المجاهيل من حل $(n-1)$ من المعادلات الناتجة من مساواة الحدود التي تحتوي على الدوال $v_i \in \mathbb{R}$ والناتجة من الإستقار المتعاقب $(n-1)$ من المرات بالصفر. وبكامل عدد المعادلات إلى n بإضافة المعادلة الناتجة بالتعويض عن المشتقات المختلفة في المعادلة التفاضلية. بعد عمل روتيني ولكنه مجهود نحصل على الصيغة

$$y(x) = \sum_{i=1}^n y_i(x) \int \frac{W_i(y_1, y_2, \dots, y_n)}{W(y_1, y_2, \dots, y_n)} f(x) dx$$

حيث $W(y_1, y_2, \dots, y_n)$ هو الرونمكين بينما W_i هو المحدد الناتج من W باستبدال العمود i بالسود $[0, 0, \dots, 0, 1]^T$ مثل ١٢:

لوجد حل المعادلة $y = \tan x$ $(D^3 + D)$ بطريقة تغيير البارامترات.
الحل:

الدالة المتبعة $y = A + B \cos x + C \sin x$ يمكن إيجاد الحل العام بالهيئة

$$y(x) = A(x) + B(x) \cos x + C(x) \sin x$$

وبفرض قيود مناسبة على مشتقات A, B, C

$$y' = B \sin x + C \cos x + A' + B' \cos x + C' \sin x$$

بفرض أن

$$A' + B' \cos x + C' \sin x = 0 \quad (1)$$

$$y'' = -B \cos x - C \sin x - B' \sin x + C' \cos x$$

وبفرض أن

$$-B' \sin x + C' \cos x = 0 \quad (2)$$

$$y''' = B \sin x - C \cos x - B' \cos x - C' \sin x$$

بتحقيق المعادلة المعطاه نحصل على

$$-B' \cos x - C' \sin x = \tan x \quad (3)$$

بحل المعادلات (1), (2), (3) نحصل على

$$A' = \tan x \Rightarrow A = A_1 + \ln \sec x$$

$$B' = -\sin x \Rightarrow B = B_1 + \cos x$$

$$C' = -\sin x \tan x \Rightarrow C = C_1 + \sin x - \ln (\sec x + \tan x)$$

بالتالى يكون الحل العام مساويا

$$y = A_1 + \ln \sec x + (B_1 + \cos x) \cos x$$

$$+ [C_1 + \sin x - \ln (\sec x + \tan x)] \sin x$$

تمارين

١ - حل المعادلات الآتية:

$$(i) \quad y'' + (x+a)(y')^3$$

$$(ii) \quad y'' = 2x(y')^2$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 1$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 1$$

$$(iii) \quad y' - 2y(1+y^2) = 0$$

$$(iv) \quad (y-a)y'' + (y')^2 = 0$$

$$(v) \quad yy'' + (y')^2 = 2y^2$$

$$(put \ y^2 = \omega)$$

٢ - حل المعادلات التفاضلية

$$(i) \quad y'' - xf(x)y' + f(x)y = 0$$

$$(ii) \quad y'' - f(x)y' + [f(x) - 1]y = 0$$

٣ - وضع كيف توجد حل المعادلة التفاضلية

$$a(x)y'' + xy' - y = f(x)$$

٤ - استخدم طريقة المعاملات غير المعينة لحل المعادلة

$$y'' + xy' + 2y = x^4$$

٥ - استخدم التعويض $x = \cosh z$ لإثبات أن

$$(x^2 - 1)y'' + xy' = \frac{d^2y}{dz^2}$$

من ثم حل المعادلة

$$(x^2 - 1)y'' + xy' - y = x$$

٦ - أوجد قيمة u التي تجعل التعويض $y = zx^u$ يحول المعادلة

$$x^2 y'' + 2x(x+2)y' + 2(x+1)^2 y = e^{-x} \cos x$$

إلى معادلة ذات معاملات ثابتة.

٧ - استخدم التعويض $v = y \ln x$ لحل المعادلة

$$x^2 \ln x y'' + x(2 + 3 \ln x) y' + (2 + \ln x) y = 1/x$$

٨ - استخدم التعويض $z = \sqrt{x}$ لحل كل من المعادلتين

$$4xy'' + (1 - \sqrt{x}) y' - 6y = e^{-2\sqrt{x}}$$

$$4xy'' + 2y' + y = 2x$$

٩ - إختزل رتبة المعادلة $x^2 y'' - 4xy' + 6y = x^4 \sin x$

مع العلم بأن $y = x^2$ تحقق المعادلة المتجانسة.

١٠ - بتحليل المؤثر أوجد حل المعادلات التفاضلية

$$(i) \quad 3x^2 y'' + (2 - 6x^2) y' - 4y = 0$$

$$(ii) \quad xy'' + (x-1) y' - y = 0$$

$$(iii) \quad xy'' + (x-1) y' - y = x^2$$

$$(iv) \quad (x^2 - 1) y'' - 2xy' + 2y = (x^2 - 1)^2$$

١١ - أثبت أن $y = e^{x^2}$ تحقق كل من

$$xy'' - (6x^2 + 1) y' + 8x^3 y = 0$$

$$y'' - 4xy' + (4x^2 - 2) y = 0$$

من ثم حل كل منهما.

١٢ - أثبت أن $y = \cos x/x$ تحقق المعادلة $xy'' + 2y' + xy = 0$

من ثم أوجد حلها العام.

١٣ - استخدم التعويض $z = \sqrt{x}$ لحل المعادلة

$$4xy'' + 2(1 - \sqrt{x})y' - 6y = e^{-2\sqrt{x}}$$

١٤ - إثبت أن $y = 1/x$ تحقق

$$x(x+1)y' + (2-x^2)y' - (2+x)y = 0$$

ثم أوجد الحل العام.

١٥ - استخدم طريقة تغيير البارامترات لحل المعادلات الآتية:

$$(i) \quad y'' + y = \sec^3 x \quad (v) \quad (D^2 - 4D + 4)y = e^{2x}/x^3$$

$$(ii) \quad y'' - 2y' + y = e^x/(1-x) \quad (vi) \quad (xD^2 - D)y = 4/x$$

$$(iii) \quad (1-x)y'' + xy' - y = (1-x)^2$$

$$(iv) \quad (D^2 + 2D + 5)y = e^{-x} \sec 2x$$

$$(vii) \quad (x^3 D^3 + xD - 1)y = x \ln \quad (viii) \quad (D^2 + 2D + 1)y = e^{-x} \ln x$$

١٦ - احذف حد الدرجة الثانية (اخترال للصيغة القياسية)

$$(i) \quad y'' + 4xy' + 4x^2y = 0 \quad (v) \quad y'' + \frac{2}{x}y' + y = \frac{\sin 2x}{x}$$

$$(ii) \quad y'' + \frac{2}{x}y' + n^2y = 0$$

$$(iii) \quad y'' - 2 \cot x y' + (1 + 2 \cot^2 x)y = 0$$

$$(iv) \quad y'' - 2y' \tan x - (a^2 + 1)y = e^x \sec x$$

١٧ - استبدل المتغير المستقل

$$(i) \quad (1+x^2)y'' + xy' + y = 1+x^2$$

$$(ii) \quad y'' - y' \cot x - y \sin^2 x = 0$$

$$(iii) \quad x^4 y'' + 2x^3 y' + n^2 y = 0$$

$$(v) \quad y'' - y' \cot x - y \sin^2 x = \cos x - \cos^3 x$$

$$(iv) \quad y'' \cos x + y' \sin x + 4y \cos^3 x = 8 \cos^5 x$$

$$(vi) \quad y'' + y' \tan x + y \cos^2 x = 2e^{\sin x} \cos^2 x$$

١٨ - استخدم التحويل المقابل لحل المعادلات التفاضلية الآتية

$$(i) \quad x^2 y'' + (3x^2 + 4x) y' + (2x^2 + 6x + 2) y = 0 \quad x^2 y = z$$

$$(ii) \quad x^2 y'' + (4x^2 + 6x) y' + (3x^2 + 12x + 6) y = 0 \quad x^3 y = z$$

$$(iii) \quad y^2 - 2y' = \frac{x^2}{1-x^2} \quad y + z = x$$

١٩ - إثبت أنه يمكن إيجاد ثابت n بحيث يحول التعويض $y = x^n z$ المعادلة

$$x^2 y'' + 4x(x+1) y' + (8x+2) y = \cos x$$

إلى معادلة تفاضلية ذات معاملات ثابتة.

ع. حل المعادلات التفاضلية الآتية

$$\frac{y''^2 - y'y'''}{y^2} = \frac{1}{x^2}, \quad xy y'' + xy'^2 = 2yy'$$

$$2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$$

نظم المعادلات الخطية

Systems of ordinary differential equations

نظم المعادلات الخطية

٨-١ نظم المعادلات التفاضلية الخطية.

تنشأ المعادلات التفاضلية الآتية فى متغيرين تابعين أو أكثر ومرتبطة بمتغير مستقل واحد فى مسائل عدة. منها على سبيل المثال، دراسة نظم ديناميكية ذات درجات حرية عديدة. هناك أيضاً سبب رياضى يحفز على دراسة نظم المعادلات وهو أنه يمكن اعتبار المعادلة التفاضلية من الرتبة n

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

نظام للمعادلات الآتية بأن نضع

$$y_1 = y, y_2 = y', \dots, y_n = y^{(n-1)}$$

من ثم

$$y'_n = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

تتركز طريقة حل نظام معادلات تفاضلية على حذف المتغيرات التابعة جميعها (مقلدين مع الفارق قواعد الحذف المعمول بها عند حل نظام معادلات جبرية) عدا واحداً منها. من ثم نحصل على معادلة تفاضلية عادية. يجب التحقق من الحلول بالتعويض فى المعادلات التفاضلية للتأكد من كون عدد الثوابت الاختيارية مناسباً.

مفوف ندرس نظم المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة حيث تساعد النظريات التالية في التعرف على إرتباطات الحلول والثوابت الاختيارية.

نعتبر نظام المعادلات التفاضلية الآتية

$$a_{11}(D)x_1 + a_{12}(D)x_2 + \dots + a_{1n}(D)x_n = f_1(t)$$

$$a_{21}(D)x_1 + a_{22}(D)x_2 + \dots + a_{2n}(D)x_n = f_2(t)$$

$$a_{n1}(D)x_1 + a_{n2}(D)x_2 + \dots + a_{nn}(D)x_n = f_n(t)$$

حيث $a_{ij}(D) = \frac{d}{dt}$ كثيرة حدود في المؤثر

يمكن كتابة هذه المعادلات بالهيئة

$$A(D)x = f(t)$$

حيث $A = [a_{ij}(D)]$ مصفوفة المعاملات التفاضلية،

$$x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^c, \quad f = [f_1 \ f_2 \ \dots \ f_n]^c.$$

النظرية التالية تتعلق بعدد الثوابت الاختيارية التي تظهر في حل نظام

$$Ax = 0 \quad \text{المواكب للنظام} \quad Ax = f$$

نظرية:

إذا لم يكن محدد مصفوفة المعاملات التفاضلية A مساوياً تطبيقاً

الصفر كان عدد الثوابت الاختيارية التي تظهر في الحل العام مساوياً درجة

كثيرة الحدود في D الناتجة من ذلك محدد A . إذا كان المحدد مساوياً الصفر

فإنه من الممكن ألا يوجد حل أو يوجد حل يحتوى على أى عدد من

الثوابت الاختيارية.

من المفيد أن نتذكر أن أي دوال x_1, x_2, \dots, x_n تكون
مستقلة خطياً إذا كان رونسكين $W(x_1, x_2, \dots, x_n)$ هذه الدوال لا يساوي
الصفر.

مثال ١:

لحل المعادلات الآتية

$$\frac{dx}{dt} = x + 2y + t - 1$$

$$\frac{dy}{dt} = 3x + 2y - 5t - 2$$

نكتب المعادلات بصيغة المؤثرات

$$(D-1)x - 2y = t - 1 \quad (1)$$

$$-3x + (D-2)y = -5t - 2 \quad (2)$$

بالتأثير على المعادلة الأولى بالمؤثر $(D-2)$ وضرب الثانية في z
لحصول على

$$(D-2)(D-1)x - 2(D-2)y = 3 - 2t$$

$$-6x + 2(D-2)y = -10t - 4$$

بالجمع

$$(D^2 - 3D - 4)x = -12t - 1$$

وحلها

$$x = Ae^{4t} + Be^{-t} + 3t - 2$$

بالتعويض في المعادلة الأولى للحصول على y

$$y = \frac{3}{2} A e^{4t} - B e^{-t} - 2t + 3$$

كالحال في الجبر الخطي يمكن الاستعاضة عن حل نظام معادلات بنظام آخر مكافئ له بإجراء عمليات صفية كتبديل صفين، الضرب في ثابت، التكاثر بمؤثر أو تركيب خطي من هذه العمليات.

مثال ٢:

لحل نظام المعادلات

$$(D+1)x - 2Dy = \cos t \quad , \quad Dx - (D-6)y = 0$$

يمكن الاستعاضة عن المعادلة الأولى بمعادلة ناتجة من طرح المعادلتين.
أي نحل النظام

$$x - (D+6)y = \cos t \quad , \quad Dx - (D-6)y = 0$$

بالتأثير على المعادلة الأولى في النظام الأخير بالمؤثر D ثم الطرح نحصل على

$$(D^2 + 5D + 6)y = \sin t \Rightarrow y = A e^{-2t} + B e^{-3t} \\ + \frac{1}{10} (\sin t - \cos t)$$

بالتعويض عن y للحصول على x

$$x = (D+6)y + \cos t = 4A e^{-2t} + 3B e^{-3t} \\ + \frac{1}{10} (7 \sin t + 5 \cos t)$$

فى المثال الآتى سوف نستخدم المحددات لإيجاد حل نظام معادلات تفاضلية .
مثال النظام

$$Dx - y = 2 \cos t \quad (1)$$

$$(D+2)x + (D+2)y = 3 \sin t - \cos t \quad (2)$$

يؤدى إلى

$$\begin{vmatrix} D & -1 \\ D+2 & D+2 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} 2 \cos t & -1 \\ 3 \sin t - \cos t & D+2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} D & -1 \\ D+2 & D+2 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} D & 2 \cos t \\ D+2 & 3 \sin t - \cos t \end{vmatrix}$$

$$i.e. \quad (D^2 + 3D + 2)x = \sin t + 3 \cos t$$

$$(D^2 + 3D + 2)y = 3 \sin t - \cos t$$

$$x = A e^{-t} + B e^{-2t} + \sin t$$

$$y = A_1 e^{-t} + B_1 e^{-2t} - \cos t$$

لإيجاد العلاقة بين الثوابت A, B, A_1, B_1 نعوض بالطول فى
أحد المعادلات التفاضلية ولتكن الأولى

$$(-A - A_1) e^{-t} - (2B + B_1) e^{-2t} + 2 \cos t = 2 \cos t$$

$$\rightarrow A_1 = -A \quad , \quad B_1 = -2B$$

من ثم

$$x = Ae^{-t} + Be^{-2t} + \sin t$$

$$y = -Ae^{-t} - 2Be^{-2t} - \cos t$$

٢-٨ نظم المعادلات من الرتبة الأولى

تلعب المصفوفات دوراً مؤثراً عند حل نظام خطي للمعادلات من

الرتبة الأولى:

$$x'_i = a_{i1}(t) x_1 + a_{i2}(t) x_2 + \dots + a_{in}(t) x_n + f_i(t) \quad (1)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

حيث جميع الدوال $a_{ij}(t)$ متصلة. يتكون حل النظام (1) والذي يمكن كتابته بلغة المصفوفات

$$x' = A(t)x + f(t).$$

كالمعادلة من الدالة المتجهة وهي حل للنظام المتجانس المتواكب

$$x' = A(t)x \quad (2)$$

مضافاً إليه حل خاص للمعادلة (1)

كالمعادلة إذا كان x_1, x_2, \dots, x_n تحقق المعادلة (2) فإن

التركيب الخطي $c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$ يحقق أيضاً

المعادلة المتجانسة لأي ثوابت $\{c_i\}$. يتكون الحل المتمم لنظام متجانس من الرتبة الأولى في n من المجاهيل من تركيب خطى من n من متجهات الحل مستقلة خطيا (رونسكين هذه المتجهات لا يساوى الصفر) بالهيئة

$$x_1 c_1 + x_2 c_2 + \dots + x_n c_n = [x_1 x_2 \dots x_n] C = X C$$

تسمى المصفوفة X المصفوفة الأساسية (Fundamental matrix) لنظام المعادلات الخطية المعطى وتتكون أعمدتها من الطول المستقلة خطيا للمعادلة المتجانسة ومشتقتها X' تساوى

$$X' = [x'_1 x'_2 \dots x'_n] = [A x_1 A x_2 \dots A x_n] = A X .$$

تتركز صعوبة حل نظام للمعادلات من الرتبة الأولى فى إيجاد الدالة المتممة. إيجاد الحل الخاص لا يمثل صعوبة كبيرة إذ يمكن إيجاده بعد إيجاد الحل المتمم بطريقة تغيير البارامترات وذلك بفترض حل بالهيئة $x_p = X u$

حيث $u = [u_{ij}]$ مصفوفة عمودية مكونة من دوال من t عوضا عن الدالة المتممة x حيث c مصفوفة عمودية مكونة من ثوابت (اختيارية). بالتعويض فى المعادلة (1)

$$x_p = (X u)' = X' u + X u' = A X u + X u' = A X u + f$$

$$\Rightarrow X u' = f$$

$$\Rightarrow u = \int X^{-1} f dt$$

تعامل المصفوفة الأساسية جبريا بإيجاد معكوسها (أعمدتها مستقلة خطيا) ثم إجراء التكامل عليها وذلك بإجراء التكامل على كل حد من

حذودها مع حذف جميع ثوابت التكامل للحصول على حل خاص

$$x_p = X \int X^{-1} f dt$$

مثال ٢:

لحل نظام المعادلات

$$x_1' = x_1 + 3x_2 + 3\sqrt{t} e^{-2t}$$

$$x_1(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$x_2' = 3x_1 + x_2 - 3\sqrt{t} e^{-2t}$$

نوجد أولاً حل المعادلة المتجانسة

$$(D-1)x_1 + 3x_2 = 0 \quad (2)$$

$$-3x_1 + (D-1)x_2 = 0$$

بحذف x_2 نحصل على

$$[(D-1)^2 - 9] x_1 = 0 \rightarrow x_1 = A e^{4t} + B e^{-2t} .$$

من ثم بالتعويض في أحد المعادلتين (2) نحصل على

$$x_2 = A e^{4t} - B e^{-2t}$$

المصفوفة الأساسية

$$X = \begin{bmatrix} e^{4t} & e^{-2t} \\ e^{4t} & -e^{-2t} \end{bmatrix} , |X| = -2e^{2t}$$

$$X^{-1}f = -\frac{1}{2}e^{-2t} \begin{bmatrix} -e^{-2t} & -e^{-2t} \\ -e^{4t} & e^{4t} \end{bmatrix} \cdot 3\sqrt{t}e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$X^{-1}f = 3\sqrt{t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X_p = X \int X^{-1} dt = 3 \begin{bmatrix} e^{4t} & e^{-2t} \\ e^{4t} & -e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} t^{3/2} \end{bmatrix}$$

$$= 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} t^{3/2} e^{-2t}$$

الحل العام

$$x(t) = A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t} + B \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-2t} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} t^{3/2} e^{-2t}$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A=1, B=0$$

من ثم

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t} + 3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} t^{3/2} e^{-2t}$$

٨-٢ نظم المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة

(Linear differential systems with constant coefficients)

تعالج نظم المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة بطريقة

مشابهة لطرق حل معادلات تفاضلية خطية ذات معاملات ثابتة.

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(t) \quad (1)$$

حيث \mathbf{A} مصفوفة ثابتة، نبدأ بحل النظام المتجانس

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (2)$$

وذلك بفرض حل بالهيئة

$$\mathbf{x} = \mathbf{k} e^{mt}$$

حيث \mathbf{k} متجه ثابت بينما m عدد قياسي بالتعويض في (2)

$$m\mathbf{k} e^{mt} = \mathbf{A}\mathbf{k} e^{mt} \rightarrow (\mathbf{A} - m\mathbf{I})\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

وعليه فإن m يجب أن يكون جذرا مميزا للمصفوفة \mathbf{A} بينما \mathbf{k} متجه مميز مناظر للجذر المميز m . يمكن للجذور المميزة أن تكون:

١ - حقيقة مختلفة

٢ - حقيقة وبعضها مكرر

٣ - بعضها تخيلي

في الحالة الأولى يمكن الحصول على الحل المتمم مباشرة. في

حالة وجود جذر m مكرر r من المرات فإنه يمكن إيجاد متجه مميز مناظر

لهذا الجذر وليكن \mathbf{k} . يمكن الحصول على بقية الحلول المناظرة للجذر

المميز m بطريقة تغيير البارامترات وذلك بفرض حل بالهيئة $\mathbf{u} e^{mt}$

بدلا من $\mathbf{k} e^{mt}$ حيث صفوف \mathbf{u} كثيرات حدود من درجة $(r-1)$

في حالة الجذور المركبة يمكن بوجه عام إيجاد حلول لها

مثل الحالة الأولى ويمكن تحويل هذه الحلول إلى حلول بدلالة دوال حقيقية

كما حدث في حالة المعادلات التفاضلية العادية.

سوف نوضح الأحوال الثلاث السابقة بأمثلة

مثال 4:

لحل نظام المعادلات

$$x' + 2x - 3y = 0$$

$$y' - 3x + 2y = 0$$

نوجد الجذور المميزة للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow 0 = |A - mI| = \begin{vmatrix} -2-m & 3 \\ 3 & -2-m \end{vmatrix} = (m+2)^2 - 9$$

$$\rightarrow m = 1, -5$$

الجذور حقيقية مختلفة ومن ثم الحالة الأولى. متجه مميز مناظر

للجذر $m = 1$

$$0 = [A - mI] X = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} X \rightarrow X = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

متجه مميز مناظر الجذر $m = -5$

$$0 = [A - 5I] X = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} X \rightarrow X = b \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

الحل المطلوب

$$X = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + b \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-5t}$$

مثال ٥:

لحل نظام المعادلات

$$x' = -5x + 2y, \quad y' = -2x - y$$

نوجد أولاً الجذور المميزة

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad 0 = |A - mI| = \begin{vmatrix} -5-m & 2 \\ -2 & -1-m \end{vmatrix}$$

$$i.e., \quad m = -3, -3$$

متجه مميز المناظر للجذر $m = -3$

$$0 = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} X - X = A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ومن ثم حل أول

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t}$$

نفرض الحل الآخر المناظر للجذر المكرر $m = -3$ بالهيئة

$$\omega = \begin{bmatrix} a+bt \\ c+dt \end{bmatrix} e^{-3t}$$

بالتعويض في المعادلة المتجانسة

$$\omega' = A\omega \rightarrow \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} e^{-3t} - 3 \begin{bmatrix} a+bt \\ c+dt \end{bmatrix} e^{-3t} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a+bt \\ c+dt \end{bmatrix} e^{-3t}$$

$$-5a + 2c = b - 3a, \quad -2a - c = d - 3c, \quad -5b + 2d = -3b, \quad -2b - d = -3d$$

$$\Rightarrow d=b \quad , \quad c=\frac{b}{2}+a$$

$$\omega = \begin{bmatrix} a+bt \\ a+\frac{1}{2}bt \end{bmatrix} e^{-3t}$$

بأخذ $a=0, b=2$ نحصل على حل ثانٍ x_2

الحل العام

$$x = A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t} + B \begin{bmatrix} 2t \\ t \end{bmatrix} e^{-3t}$$

مثال ٦:

حل نظام المعادلات

$$x' - y = 0$$

$$y' + x = 0$$

نوجد الجذور المميزة للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow |A - mI| = 0 = \begin{vmatrix} -m & -1 \\ 1 & -m \end{vmatrix} = m^2 + 1$$

$$\Rightarrow m = \pm i$$

متجه مميز مناظر الجذر i

$$\begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} x = 0 \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

بالمثل متجه مميز مناظر للجزء $-i$

$$\begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \mathbf{x} = 0 \rightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

من ثم الحل العام

$$y = A \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} e^{it} + B \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{-it}$$

يمكن كتابة الحل

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} e^{it}$$

كالآتي

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} (\cos t + i \sin t) = \begin{bmatrix} \cos t + i \sin t \\ \sin t - i \cos t \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{bmatrix}$$

كلا المتجهين المستقلين

$$\begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{bmatrix} \begin{matrix} T \\ T \end{matrix}$$

يحقق نظام المعادلات التفاضلية المعطى وعليه يمكن كتابة الحل بدلالة

دوال حقيقية بالهيئة

$$\mathbf{x} = a \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{bmatrix}$$

تمارين

حل نظم المعادلات الآتية

$$1) \quad \dot{x} + 2x + y = 0, \quad \dot{y} + x + 2y = 0 \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0$$

$$2) \quad \dot{x} = 4x - 2y + e^t, \quad \dot{y} = 6x - 3y$$

$$3) \quad \dot{y} - 2x = \cos t, \quad \dot{x} + 2y = -\sin 2t$$

$$4) \quad \dot{x} + \dot{y} + 2x + y = e^{-3t}, \quad \dot{y} + 5x + 3y = 5e^{-2t}$$

$$x(0) = -1, \quad y(0) = 4$$

$$5) \quad \dot{x} + x - y = te^t, \quad 2y - \dot{x} + \dot{y} = e^t$$

$$6) \quad 2\dot{x} + \dot{y} = 2t - x - 2y, \quad \dot{x} + \dot{y} = 3t + x - 3y$$

$$7) \quad 2\dot{x} - \dot{y} + 3x = 2t, \quad \dot{x} + 2\dot{y} - 2x - y = t^2 - t$$

$$x(0) = y(0) = 1$$

$$8) \quad \dot{x} + 2y + \sin t = 0, \quad \dot{y} - 2x - \cos t = 0$$

$$9) \quad \dot{x} = x + 3y, \quad \dot{y} = 3x + y$$

$$10) \quad t\dot{x} + y = 0, \quad t\dot{y} + x = 0$$

مسائل القيم الحدية

Boundary value problems

مسائل القيم الحدية

عند التعرض لحلول معادلات تفاضلية تعطى فيها شروط إضافية عند نقطة واحدة تسمى مثل هذه المعادلات بمسائل القيم الأولية - (Initial value Problems) أما إذا أعطيت القيم الإضافية عند نقطتين أو أكثر سميت بمسائل القيم الحدية.

دراسة مسائل القيم الحدية سوف نقودنا إلى مفاهيم إما أن يكون قد سبق دراستها أو مفاهيم جديدة مثل: القيم والدوال الذاتية، الدوال المتعامدة، مفكوك فورير، مسائل شترم ولوفى، صيغة جرين.

تغطية دراسة هذه المفاهيم وغيرها بدقة لن يتسع لها الحيز المتاح من هذا الكتاب، لذا في حالات عديدة سوف نعرض نظريات بدون إثبات ولكن مصحوبة بأمثلة وإيضاحات تساعد في فهم وتقييم وإستعمال هذه للنظريات.

٩-١ مسائل القيم الحدية المتجانسة

(Homogeneous Boundary - Value Problems)

نعتبر مسألة القيم الحدية المتجانسة

$$Ly = 0 \quad a \leq x \leq b$$

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0 \quad (1)$$

$$\alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0$$

حيث L هو المؤثر التفاضلى

$$L = a_0(x) D^2 + a_1(x) D + a_2(x) \quad a_0(x) \neq 0 \quad (2)$$

بينما a_0, a_1, a_2 دوال متصلة فى الفترة $[a, b]$. سوف نفترض أن α_1, β_1 ليسا فى آن واحد أصفارا وكذلك α_2, β_2 . تسمى الشروط الحدية فى (1) خطية ومتجانسة لأنه إذا كانت كل من $v(x)$, $u(x)$ تحققان هذه الشروط فإن أى تركيب خطى منها أيضا يحقق هذه الشروط. تسمى أيضا هذه الشروط الحدية غير مختلطة لأن كل شرط حدى يحتوى على قيم y, y' عند نقطة واحدة فقط.

مسألة القيمة الحدية المتجانسة (1) لها دائما الحل الصفرى.

سنبحث شرط وجود حل غير الحل الصفرى. نفرض أن $y_1(x), y_2(x)$

هما حلان مستقلان للمعادلة $Ly=0$. يمكن كتابة الحل العام بالهيئة

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \quad (3)$$

تتحقق الشروط الحدية إذا كان

$$\alpha_1 y(a) - \beta_1 y'(a) = 0 \quad (4)$$

$$\alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0$$

بإستعمال (3) نحصل على

$$\alpha_1 [c_1 y_1(a) + c_2 y_2(a)] + \beta_1 [c_1 y_1'(a) + c_2 y_2'(a)] = 0$$

$$\alpha_2 [c_1 y_1(b) + c_2 y_2(b)] + \beta_2 [c_1 y_1'(b) + c_2 y_2'(b)] = 0 \quad (5)$$

بتجميع معاملات C_1 , C_2 نحصل على

$$C_1 B_a(y_1) + C_2 B_a(y_2) = 0$$

$$C_1 B_b(y_1) + C_2 B_b(y_2) = 0 \quad (6)$$

حيث إستخدما الاختصار

$$B_a(u) = \alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a)$$

$$B_b(u) = \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) \quad (7)$$

للمعادلات الجبرية (6) حل غير الحل الصفري في C_1 , C_2 إذا كان

$$\begin{vmatrix} B_a(y_1) & B_a(y_2) \\ B_b(y_1) & B_b(y_2) \end{vmatrix} = 0$$

من ثم فإن الحلول الغير تافهة لمسألة القيمة الحدية (1) تتواجد إذا وفقط إذا

تحققت (8)

مثال ١:

لإيجاد حل المعادلة

$$y'' + \pi^2 y = 0 \quad y(0) = 0 \quad , \quad y(1) = 0$$

نوجد أولاً الحل العام للمعادلة التفاضلية و

$$y = A \cos \pi x + B \sin \pi x$$

$$y(0) = 3\pi A \quad , \quad y(1) = 0 = -A$$

من ثم فإن $A=0$ بينما B ثابت (إختياري وبالتالى فإن حل مسألة القيمة الحدية هو

$$y = B \sin \pi x$$

مثال ٢:

مسألة القيم الحدية

$$y'' + \pi^2 y = 0, y(0) = 0, y\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

حلها العام هو

$$y = A \cos \pi x + B \sin \pi x$$

وشروطها الحدية تؤدي إلى

$$0 = A \quad , \quad 0 = B$$

ومن ثم فإن حلها الوحيد هو $y=0$.

٢-٩ مسائل القيم الذاتية (Eigenvalue Problems)

كثير من مسائل القيم الحدية المتجانسة التى تظهر فى مسائل

فيزيائية تحوى على بارامتر. نوع هام من هذه الأنواع هو

$$Ly = \lambda y \quad a \leq x \leq b$$

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0 \quad (9)$$

$$\alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0$$

حيث λ بارامتر بينم L هو المؤثر

$$L = a_0(x) D^2 + a_1(x) D + a_2(x) \quad a_0 \neq 0 \quad (10)$$

وفيه a_0, a_1, a_2 دوال متصلة.

الحل الثاني $y=0$ هو أحد الحلول لأي قيمة من قيم λ . إذا وجد حل غير تافه عند قيمة $\lambda = \lambda_1$ سميت هذه القيمة قيمة ذاتية (an eigenvalue) لمعادلة القيمة الذاتية والحل المناظر y_1 يسمى دالة ذاتية (an eigenfunction). عندما يؤثر المؤثر L على دالة فله غيرها جوهريا ولكن عندما يؤثر على دالة ذاتية فإن نتيج للتأثير هو ضرب الدالة بالقيمة ذاتية.

لتوضيح استخدام الدوال الذاتية نعتبر المعادلة لغير متجانسة

$$Ly = f(x), \quad \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0, \quad \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \quad (11)$$

حيث L هو المؤثر (10). نفرض أن y_1, y_2, \dots, y_n هي الحلول المميزة المناظرة للقيم المميزة $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ للمعادلة $Ly = \lambda y$ أي أن

$$Ly_i = \lambda_i y_i, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (12)$$

حيث $y_i(x)$ تحقق الشروط الحدية. إذا افترضنا أن $f(x)$ ترتيب خطي من الدوال الذاتية

$$f(x) = A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots + A_n y_n \quad (13)$$

يمكن إيجاد حل للمعادلة التفاضلية

$$Ly = A_1 y_1 + \dots + A_n y_n \quad (14)$$

بفرض أنه على الهيئة

$$y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n \quad (15)$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية نحصل على

$$\begin{aligned} L(c_1 y_1 + \dots + c_n y_n) &= \lambda_1 c_1 y_1 + \dots + \lambda_n c_n y_n \\ &= A_1 y_1 + \dots + A_n y_n \end{aligned}$$

$$\text{i.e.} \quad c_1 = \frac{A_1}{\lambda_1}, \quad c_2 = \frac{A_2}{\lambda_2}, \quad \dots, c_n = \frac{A_n}{\lambda_n}$$

بافتراض عدم إعدام أى قيمة ذاتية.

مثال ٣:

أوجد القيم والدوال المميزة لمسألة القيمة الحدية

$$(xy')' + \frac{\lambda y}{x} = 0 \quad y(1) = y(e^\pi) = 0$$

الحل:

يمكن كتابة المعادلة كالآتي

$$x^2 y'' + xy' + \lambda y = 0 \Rightarrow [\theta(\theta - 1) + \theta + \lambda] y = 0$$

حيث

$$\theta = \frac{d}{dt}, \quad x = e^t$$

$$\text{or} \quad (\theta^2 + \lambda) y = 0$$

حل المعادلة التفاضلية الأخيرة يتوقف على قيم λ . نعتبر $\lambda = 0$

$$y = A + Bx = A + B \ln x$$

$$y(1) = y(e^0) = 0 \Rightarrow A = 0, \quad A + B\pi = 0 \Rightarrow A = B = 0$$

ويكون $y = 0$ هو الحل الوحيد ومن ثم فإن $\lambda = 0$ ليست قيمة ذاتية. نعتبر $\lambda < 0$. الحل في هذه الحالة يسوى

$$y = \frac{A}{x^{\sqrt{-\lambda}}} + Bx^{\sqrt{-\lambda}}$$

$$y(1) = y(e^0) = 0 \Rightarrow A + B = 0 = Ae^{-\sqrt{-\lambda}\pi} + Be^{\sqrt{-\lambda}\pi} \Rightarrow A = B = 0$$

ويكون $y = 0$ هو الحل الوحيد ومن ثم فإن $\lambda < 0$ ليست قيمة ذاتية. نعتبر $\lambda > 0$. الحل يسوى

$$y = A \cos(\sqrt{\lambda} \ln x) + B \sin(\sqrt{\lambda} \ln x)$$

$$y(1) = y(e^0) = 0 \Rightarrow A = 0 = A \cos \sqrt{\lambda} \pi + B \sin \sqrt{\lambda} \pi$$

$$= B \sin \sqrt{\lambda} \pi$$

إذا اخترنا λ بحيث

$$\sin \sqrt{\lambda} \pi = \sin n\pi = 0 \Rightarrow \lambda = n^2 \quad n = 1, 2, \dots$$

حصل على القيم الذاتية لمسألة القيم الحدية وهي

$$\lambda_n = 1, 2^2, 3^2, \dots$$

٢-٣ الدوال المتعامدة (Orthogonal Functions)

يعرف حاصل الضرب الداخلي لـ f, g متصليتين في

الفترة $[a, b]$ والذي يرمز له بالرمز (f, g) كالآتي:

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x) dx$$

لحاصل الضرب الداخلي الخواص الآتية:

$$\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$$

$$\langle \alpha f + \beta g, h \rangle = \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle$$

$$\langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$$

$$\langle f, f \rangle > 0 \text{ if } f \neq 0$$

هذه الخواص هي نفس خواص حاصل الضرب الداخلي الذي يجرى على المتجهات العادية. مطابقة لما يجرى على المتجهات يعرف قياس (Norm) دالة f والذي يرمز له بالرمز $\|f\|$ كالآتي:

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

$$= \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx}$$

إذا كان $\|f\| = 1$ نقول أن الدالة f معقدة (Normalized). مفهوم تعامد متجهات يمكن فهمه على الدوال نقول أن الدالتين

f, g متعامدتان في الفترة $[a, b]$ إذا كان

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx = 0$$

مثال 4:

الدالتان $x, \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ متعامدتان في الفترة $(-1, 1)$

$$\langle x, \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \rangle = \int_{-1}^1 x \cdot \frac{1}{2}(3x^2 - 1) dx = 0$$

نقول أن عائلة الدوال (ϕ_1, ϕ_2, \dots) متعامدة في الفترة $[a, b]$ إذا كان

$$\int_a^b \phi_i(x) \phi_j(x) dx = 0 \quad i \neq j$$

إذا كان قياس كل دالة من عائلة دوال متعامدة تساوى الوحدة سميت العائلة متعامدة (Orthonormal).

مثال ٥:

عائلة الدوال

$$\left\{ \frac{1}{a}, \frac{2}{a} \cos \frac{\pi x}{a}, \frac{2}{a} \cos \frac{2\pi x}{a}, \dots \right\}$$

متعامدة في الفترة $[0, a]$

٤-٩ دوال وزن (Weight Functions)

نقول أن الدالتين المتصلتين $f(x), g(x)$ متعامدتان في الفترة $[a, b]$ بالنسبة لدالة وزن متصلة $w(x)$ إذا كان

$$\int_a^b w(x) f(x) g(x) dx = 0$$

بافتراض أن $w(x) \geq 0$ في الفترة $[a, b]$ وأنها لا تساوى الصفر تطابقاً. يمكن أن نعتبر التعريف السابق هو تعريف لحاصل ضرب داخلي جديد نرمز له بالرمز

$$(f, g)_w = \int_a^b w(x) f(x) g(x) dx$$

حاصل الضرب الداخلي الجديد له نفس خواص حاصل الضرب الداخلي السابق.

نفرض أن $f(x), g(x)$ دوال مركبة القيم من متغير حقيقي. يعرف حاصل الضرب الداخلي المركب كالآتي:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

حيث $\overline{g(x)}$ ترمز لمرافق $g(x)$. للضرب الداخلي المركب الخواص الآتية:

$$\langle f, f \rangle > 0 \quad f \neq 0$$

$$\langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$$

$$\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$$

$$\langle \alpha f + \beta g, h \rangle = \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle$$

حيث α, β ثوابت مركبة
مثال ٦:

عائلة الدوال e^{inx} $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ متعامدة في

الفترة $0 \leq x \leq 2\pi$

تعريف:

عائلة دوال (أو متجهات) متعامدة $\{\phi_i\}$ تكون تامة (Complete)

إذا كان لأي دالة f من فراغ هذه المتجهات

$$\|f\|^2 = \sum \langle f, \phi_i \rangle^2$$

نفرض أن $\{\phi_i\}$ عائلة دوال متعامدة وتامة في الفترة $[a, b]$ وأن f دالة إختيارية متصلة ومعرفة على $[a, b]$. يمكن كتابة f كالآتي:

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \phi_i(x)$$

يمكن الحصول على المعاملات $\{a_i\}$ بضرب الطرفين في ϕ_i ثم التكامل

$$\int_a^b f(x) \phi_j(x) dx = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \int_a^b \phi_i \phi_j dx = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \delta_{ij}$$

حيث δ_{ij} رمز كرونكر دلتا (Kronecker delta)

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

$$i.e. \quad a_j = (f, \phi_j) = \int_a^b f(x) \phi_j(x) dx$$

أى أن a_j هو حاصل الضرب الداخلى للدالتين $f(x)$, $\phi_j(x)$ يسمى المفكوك

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \phi_i(x)$$

أحياناً بتعميم متسلسلة فوريير (Generalized Fourier series).

بينما يسمى المعامل

$$a_i = \int_a^b f(x) \phi_i(x) dx$$

معامل فوريير المتسم

٥-٩ مسألة شتروم ولواش (The Sturm - Liouville Problem)

تحت شروط خاصة تكون الدوال المميزة لمسألة قيم مميزة

مجموعة متنامدة. على سبيل المثال الدوال المميزة لمسألة القيم الحدية

$$y'' + \lambda y = 0 \quad y(0) = y(a) = 0 \quad (16)$$

هى

$$\left\{ \sin \frac{n\pi x}{a} \right\} \quad n = 1, 2, \dots$$

وهى مجموعة متعامدة فى الفترة $[0, a]$. سوف ندرس بعضاً من فصول مسائل القيم المميزة التى دوالها المميزة متعامدة يقال أن مؤثر L مرافق ذاتى (Self-adjoint) إذا كان بالهيئة

$$Ly = (P(x)y')' + q(x)y \quad p(x) \neq 0 \quad (17)$$

حيث $p(x), p'(x), q(x)$ دوال متصلة فى فترة ما $[a, b]$.
نعتبر مسألة القيم الذاتية بشروط حدية غير مختلفة

$$L(y) + \lambda \omega(x)y = 0 \quad a \leq x \leq b$$

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0 \quad \alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0 \quad (18)$$

$$\alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 \neq 0$$

حيث $\omega(x) \geq 0$ دالة متصلة لا تتعم تطابقاً بينما L مؤثر مرافق ذاتى. تسمى المسألة (18) مسألة شترم - لوفى.
نظرية:

الدوال الذاتية للمسألة (18) المناظرة لقيم ذاتية مختلفة تكون متعامدة بالنسبة لدالة الوزن $\omega(x)$.

الإثبات:

نفرض أن y_n, y_m هي دوال مميزة منظرية القيم

المميزة λ_n, λ_m

$$1. \text{ع.} \quad L(y_n) + \lambda_n \omega(x) y_n = 0$$

$$L(y_m) + \lambda_m \omega(x) y_m = 0$$

بضرب المعادلة الأولى في y_m والثانية في y_n والجمع

$$y_n L(y_m) - y_m L(y_n) = (\lambda_n - \lambda_m) \omega(x) y_n y_m$$

بتكامل الطرفين

$$\int_a^b [y_n L(y_m) - y_m L(y_n)] dx = (\lambda_n - \lambda_m) \int_a^b \omega(x) y_n y_m dx \quad (19)$$

ولكن

$$\begin{aligned} \int_a^b [y_n L(y_m) - y_m L(y_n)] dx &= \int_a^b [y_n (p y_m')' - y_m (p y_n')'] dx \\ &= \int_a^b [p(x) (y_n y_m' - y_m y_n')] dx = [p(x) (y_n y_m' - y_m y_n')]_a^b \quad (20) \end{aligned}$$

تعرف المعادلة (20) باسم متطابقة لاجرانج (وهي لا تتحقق حالة

كون L مؤثر غير مراقب ذاتي). باستخدام الشروط الحدية نحصل على

$$[p(x) (y_n y_m' - y_m y_n')]_a^b = 0$$

من ثم

$$\int_a^b \omega(x) y_n y_m dx = 0$$

منعروض الآن بعض تعميمات النظرية السابقة.

ظروف حدية دورية (Periodic boundary conditions)

نناقش حل مسألة القيم الحدية (3) باستبدال الشروط الحدية بالشروط الدورية (المختلطة)

$$1- \quad y(a) = y(b) \quad 2- \quad y'(a) = y'(b)$$

إذا افترضنا بالإضافة إلى هذا أن $p(a) = p(b)$ تحققت النظرية السابقة بنفس الإثبات وحصلنا على تعامد الدوال المميزة المناظرة لقيم مميزة مختلفة بالنسبة لدالة الوزن $\omega(x)$.

نقط حدية شاذة (Singular end Points)

إذا كانت $p(a) = 0$ في مسألة شترم - لوافي تحقق إثبات النظرية مع إلغاء الشرط الأول من (18) بشرط ألا يؤول $y(x)$ إلى ∞ بإقتراب x من a . من ثم مع حالة $p(a) = 0$ نطلب أن يكون الحل محدودا عند $x = a$. مع هذا الشرط نحصل أيضا على تعامد الدوال المميزة المناظرة لقيم مميزة.

بنفس الطريقة إذا كان $p(b) = 0$ أمكن استبدال الشرط الثاني من (3) بأن تكون $y(x)$ محدودة عند $x = b$.

إذا كانت $p(a) = p(b) = 0$ أمكن حذف شرطى (18) واستبدالهما بالشرط أن تكون $y(x)$ دالة محدودة عند كل من $x = a, x = b$.

٦ - ٩ نظريات عن القيم والدوال المميزة

سوف نعرض بدون إثبات لنظريات تتعلق بالقيم والدوال المميزة
لمسألة شترم - لوفى

$$[p(x)y']' + [q(x) + \lambda(x)]y = 0 \quad a \leq x \leq b$$

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0 \quad \alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0$$

$$\alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 \neq 0$$

حيث $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$, $\omega(x)$ دوال متصلة فى الفترة $[a, b]$
وحيث $p(x) \neq 0$, $\omega(x) \equiv 0$, $\omega(x) \geq 0$
نظرية:

لمسألة شترم - لوفى السابقة عدد لا نهائى من القيم المميزة
الحقيقية وغير المبالية. يمكن ترتيب القيم المميزة تصاعدياً

$$0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$$

بحيث $\lambda_n \rightarrow \infty$
نظرية:

يواكب كل قيمة مميزة λ_1 دالة مميزة واحدة ϕ_1 (فى حدود
الضرب فى ثابت).
نظرية:

لعائلة الدوال المميزة $\{\phi_1, \phi_2, \dots\}$ تكون عائلة كاملة ومتعامدة فى
الفترة $[a, b]$ بدالة ورن $\omega(x)$.

نظرية:

أى دالة ناعمة فى مقاطع $f(x)$ فى الفترة $a \leq x \leq b$ يمكن كتابتها على هيئة متسلسلة فورير متقاربة بانتظام إلى الدالة $f(x)$ عند أى نقطة فى الفترة المفتوحة $a < x < b$ تكون عندها $f(x)$ متصلة. عند النقط التى لا تكون عندها $f(x)$ متصلة فإن المتسلسلة تتقارب إلى القيمة المتوسطة النهايتين اليمنى واليسرى للدالة $f(x)$. أى أنه إذا كانت x نقطة عدم اتصال للدالة $f(x)$ فى الفترة $a < x < b$ فإن ..

$$\frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)] = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \phi_n(x) \quad a < x < b$$

حيث

$$\gamma_n = \frac{\int_a^b \omega(x) f(x) \phi_n(x) dx}{\int_a^b \omega(x) \phi_n^2(x) dx}$$

٧-٩ مسائل المعادلات التفاضلية غير المتجانسة

(Nonhomogeneous boundary - value problems)

نعتبر المسألة الحدية

$$Ly = f(x) \quad a \leq x \leq b$$

$$B_1(y(a)) : \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0 \quad \alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0$$

$$B_2(y(b)) : \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 \neq 0 \quad (21)$$

حيث $f(x)$ دالة متصلة بينما L هو المؤثر

$$L = p(x) D^2 + q(x) D + r(x) \quad p(x) \neq 0$$

وحيث p, q, r دوال متصلة في الفترة $[a, b]$

نفرض أن نحل العام للمعادلة $Ly = f$ هو

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p \quad (22)$$

حيث y_1, y_2 هما حلان مستقلان للمعادلة $Ly = 0$ بينما y_p هو حل

خاص للمعادلة $Ly = f$. من طريقة تعبير البارامترات يمكن كتابة صيغة

مناسبة للحل y_p كالآتي:

$$y_p = \int_a^x \frac{y_1(t) y_2(x) - y_1(x) y_2(t)}{W[y_1(t), y_2(t)]} \frac{f(t)}{p(t)} dt \quad (23)$$

حيث

$$W[y_1(t), y_2(t)] = W(t)$$

هو رونسكين $y_1(t), y_2(t)$ ، إذا كان المؤثر L مرافق ذاتي ($q = p'$)

كان $W(t) p(t)$ مقدارا ثابتا.

لكي نتحقق الشروط الحدية فلن

$$c_1 B_1(y_1) + c_2 B_1(y_2) + B_1(y_p) = 0$$

$$c_1 B_2(y_1) + c_2 B_2(y_2) + B_2(y_p) = 0 \quad (24)$$

إذا أمكن إيجاد c_1, c_2 تحققان المعادلتين السابقتين كان المسألة حل.

يكون للمسألة حل وحيد إذا وفقط إذا كان

$$\begin{vmatrix} B_1(y_1) & B_1(y_2) \\ B_2(y_1) & B_2(y_2) \end{vmatrix} \neq 0$$

أى إذا فقط إذا كان حل المعادلتين المتجانستين

$$c_1 B_1(y_1) + c_2 B_1(y_2) = 0$$

$$c_1 B_2(y_1) + c_2 B_2(y_2) = 0 \quad (25)$$

هو الحل الصفري. أى إذا كان لمساواة القيم الحدية المتجانسة

$$L(y) = 0, \quad B_1(y(a)) = B_2(y(b)) = 0$$

الحل الصفري فقط.

من ثم نحصل على

نظرية:

يكون لمساواة القيم الحدية $Ly = f, 0 = B_1(y(a)) = B_2(y(b))$

حل وحيد إذا فقط إذا لم يكن لمساواة القيم الحدية المناظرة

$$Ly = 0, \quad B_1(y(a)) = 0 = B_2(y(b))$$

حل غير الحل الصفري.

سوف نحصل على صيغة مدمجة عندما لا يكون للمعادلة

المتجانسة غير الحل الصفري. من العلاقة (23) نرى أن

$$y(a) = y'(a) = 0 \Rightarrow B_1 y_p(a) = 0 \quad (26)$$

$$B_2 y_p(b) = \alpha_2 \int_a^b \frac{y_1(t) y_2(b) - y_1(b) y_2(t)}{p(t) w(t)} f(t) dt +$$

$$\beta_2 \int_a^b \frac{y_1(t) y_2'(b) - y_2'(b) y_2(t)}{p(t) w(t)} f(t) dt + 0$$

$$= \int_a^b \frac{B_2(y_2(b)) y_1(t) - B_2(y_1(b)) y_2(t)}{p(t) W(t)} f(t) dt$$

للحصول على صيغة بسيطة نختار $y_1(x)$ حل (غير تافه) للمعادلة $Ly=0$ (الغير مقيدة بشروط حدية) يحقق الشرط

$$B_1(y_1(a)) = 0 = \alpha_1 y_1(a) + \beta_1 y_1'(a)$$

بينما نختار y_2 حل مستقل آخر يحقق الشرط الحدى $B_2(y_2(b)) = 0$ فى هذه الحالة نختار المعادلات (24) إلى

$$c_2 B_1(y_2(a)) = 0$$

$$c_1 B_2(y_1(b)) + B_2(y_p(b)) = 0 \quad (28)$$

حيث أن $B_2 y_2(a) \neq 0$ وإلا كان y_2 حلا غير تافه للمعادلة

$$Ly=0, \quad B_1(y)=0=B_2(y)$$

من ثم $c_2=0$ وعليه

$$c_1 = - \frac{B_2 y_p(b)}{B_2 y_1(b)} = \int_a^b \frac{y_2(t) f(t)}{p(t) W(t)} dt \quad (29)$$

حيث استخدمنا (27) والحقبة $B_2(y_2(b)) = 0$.. نلاحظ أيضا

أن $B_2(y_1(b)) \neq 0$ من ثم فإن حل (21) هو

$$y = c_1 y_1(x) + y_p = \int_a^x \frac{y_2(t) y_1(x)}{p(t) W(t)} f(t) dt + \int_a^b \frac{y_1(t) y_2(x) - y_2(t) y_1(x)}{p(t) W(t)} f(t) dt \quad (30)$$

يتجزئ التكامل الأول إلى جزئين

$$y = \int_a^b \frac{y_2(t) y_1(x)}{p(t) W(t)} f(t) dt + \int_x^b \frac{y_2(t) y_1(x)}{p(t) W(t)} f(t) dt + \int_a^x \frac{y_1(t) y_2(x) - y_2(t) y_1(x)}{p(t) W(t)} f(t) dt \quad (31)$$

$$i. e. \quad y = \int_x^b \frac{y_2(t) y_1(x)}{p(t) W(t)} f(t) dt + \int_a^x \frac{y_1(t) y_2(x)}{p(t) W(t)} f(t) dt \quad (32)$$

تعرف دالة جرين (Green's function) للمسألة الحدية بالنظرية السابقة كالآتي:

$$g(x, t) = \begin{cases} \frac{y_2(t) y_1(x)}{p(t) W(t)} & x \leq t \\ \frac{y_1(t) y_2(x)}{p(t) W(t)} & t \leq x \end{cases}$$

بحيث يمكن كتابة (32) كالآتي:

$$y(x) = \int_a^b g(x, t) f(t) dt \quad (34)$$

بوجه عام أى دالة $g(x, t)$ لها الخاصية أن حلى المعادلة الغير متجانسة يمكن التعبير عنه على هيئة تكامل كالورد فى (34) تسمى دالة جرين.

مثال ٧:

لإيجاد دالة جرين للمعادلة غير المتجانسة

$$y'' = f(x) \quad y(0) = y(1) = 0$$

نرى أن للمعادلة المتجانسة $y'' = 0, y(0) = y(1) = 0$ الحل الصفرى فقط، باعتبار $y_2 = x-1, y_1 = x$ وحيث أن

$$p(x) W(x) = 1 [x \cdot 1 - (x-1) \cdot 1] = 1$$

من ثم

$$g(x, t) = \begin{cases} x(t-1) & x \leq t \\ t(x-1) & t \leq x \end{cases}$$

ويكون الحل معلوما

$$y(x) = \int_0^1 g(x, t) f(t) dt \\ = \int_0^x t(x-1) f(t) dt + \int_x^1 x(t-1) f(t) dt$$

مثال ٨:

لإيجاد دالة جرين للمسألة الحدية

$$y'' - y = f(x) \quad y(\pm\infty) = 0$$

نرى أن حل المعادلة المتجانسة

$$y'' - y = 0 \quad y(\pm\infty) = 0$$

هو الحل التافه. بإعتبار $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = e^{+x}$ وحيث أن

$$p(x) W(x) = 2$$

من ثم

$$g(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^t e^{-x} = \frac{1}{2} e^{t-x} & x \leq t \\ \frac{1}{2} e^{-1} e^x = \frac{1}{2} e^{x-t} & t \leq x \end{cases}$$

$$i.e. \quad g(x, t) = \frac{1}{2} e^{-|x-t|}$$

ويكون حل المسألة الحدية هو

$$y = \frac{1}{2} \int_{-x}^x e^{-|x-t|} f(t) dt$$

سوف ندرس حل المسألة الحدية (21) عندما يكون للمعادلة

المتجانسة حل غير تافه. نفرض أن $y_1(x)$ هو هذا الحل. الحل العام في

هذه الحالة هو $c y_1(x)$ · الحل $y_2(x)$ يحقق الشرطين

الحدين $B_1(y_1(a)) \cdot B_2 y_1(b) = 0$ وتؤول المعادلات (4) إلى

$$c_2 B_1 y_2(a) = 0$$

$$c_2 B_2 y_2(b) + B_2 y_p(b) = 0 \quad (35)$$

حيث أن y_1, y_2 مستقلتان خطياً وكذلك $B_1(y_1(a)) \neq 0$ بالتالي

$c_2 = 0$ وعليه يوجد للشروط (35) وبالتالي للمسألة (21) حل إذا

كان $B_2 y_p(b) = 0$ باستخدام الصيغة (27) وأن $B_2 y_1(b) = 0$

نحصل على

$$B_2 y_p(b) = B_2 y_2(b) \int_a^b \frac{y_1(t) f(t)}{p(t) W(t)} dt = 0 \quad (36)$$

مما سبق نستخلص الآتي:

يوجد حل للمسألة الحدية $Ly = f, B_1(y(a)) = B_2 y(b) = 0$

إذا وفقط وإذا تحققت (36). إذا كان المؤثر مرافق ذاتي كانت $p(t) W(t)$

مقداراً ثابتاً وعليه يوجد حل لمسألة المؤثر للمرافق

الذاتي $Ly = f, B_1 y(a) = B_2 y(b) = 0$ إذا وفقط إذا حققت f

التكامل

$$\int_a^b f(t) y_1(t) dt = 0 \quad (37)$$

لإيجاد صيغة صريحة للحل عندما تتحقق (36) نرى أن في حل

(24) يكون $c_2 = 0$ بينما c_1 اختياري بحيث يمكن كتابة الحل العام

للمسألة الحدية بالهيئة

$$y = c_1 y_1(x) + y_p =$$

$$= c_1 y_1(x) + \int_a^x \frac{y_1(t) y_2(x) - y_2(t) y_1(x)}{p(t) W(t)} f(t) dt$$

$$= c_1 y_1(x) + \int_x^b \frac{y_1(x) y_2(t) - y_2(x) y_1(t)}{p(t) W(t)} f(t) dt \quad (38)$$

$$+ \int_a^x \frac{y_1(t) y_2(x) - y_2(t) y_1(x)}{p(t) W(t)} f(t) dt \quad (39)$$

حيث أنخذ في (39) حدا على هيئة $y_1(x)$ مضروباً في ثابت (الحد الأوسط). بإجراء نفس خطوات الحصول على المعادلة (34) نحصل على

$$y = c_1 y_1(x) + \int_a^b g(x, t) f(t) dt \quad (40)$$

حيث تعطى دالة جرين من

$$g(x, t) = \begin{cases} \frac{y_2(t) y_1(x)}{p(t) W(t)} & x \leq t \\ \frac{y_1(t) y_2(x)}{p(t) W(t)} & x \geq t \end{cases}$$

حيث $y_1(x)$ هو حل غير تافه للمعادلة المتجانسة بينما y_2 هو حل مستقل للمعادلة $Ly=0$.

مثال ٩:

لحل المعادلة

$$y'' = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y(1) - y'(1) = 0$$

نرى أن لمواكبتها المتجانسة حل غير تافه $y_1 = x$. يمكن اعتبار $y_2 = 1$ بالتالى

$$PW(y_1, y_2) = 1 \cdot (x \cdot 0 - 1 \cdot 1) = -1$$

من ثم

$$g(x, t) = \begin{cases} -x & x \leq t \\ -t & t \geq x \end{cases}$$

ويكون الحل مساويا

$$\begin{aligned} y &= c_1 x + \int_0^x g(x, t) f(t) dt = \\ &= c_1 x + \int_0^x (-t) f(t) dt + \int_x^1 (-x) f(t) dt \end{aligned}$$

بشرط أن ينعدم التكامل

$$\int_0^1 xf(x) dx = 0$$

١ - نوجد الحلول إن وجدت لمسائل القيم الحدية

$$a) \quad y'' + 9y = x \quad y(0) = 0, y(\pi) = 0$$

$$b) \quad y'' + 9y = \sin x \quad y(0) = 0, y(\pi) = 1$$

$$c) \quad y'' + 9y = \sin x \quad y(0) = 1, y(\pi) = -1$$

٢ - أثبت أن المعادلة $y'' + \pi^2 y = f(x)$, $y(0) = y(1) = 0$ حل إذا وفقط إذا كان $\int_0^1 f(x) \sin \pi x dx = 0$ وعقد وجود الحل أثبت أنه يعطى من

$$\frac{1}{\pi} \int_0^x f(t) \sin \pi (x-t) dt + c \sin \pi x$$

٣ - نوجد القيم المميزة للمسألة الحدية

$$y'' + \lambda y = 0 \quad y'(0) = y'(a) = 0$$

٤ - إذا كانت (λ_i) قيما مميزة للمؤثر L دوالها المميزة $\{y_i\}$ أثبت أن حل المعادلة

$$Ly + \lambda y = \sum_{i=1}^n A_i y_i$$

يعطى من

$$y = \sum_{i=1}^n \frac{A_i y_i}{\lambda - \lambda_i}$$

حيث λ - ليس قيمة مميزة.

ج - ٥

$$y'' + \lambda y = \sum_{k=1}^n a_k \sin k\pi x \quad y(0) = y(1) = 0, \quad \lambda \neq k^2 \pi^2$$

٦ - إثبت أن كثيرات حدود تشيبشيف (Tchebycheff) للمعرفة كالآتي

$$T_0(x) = 1, \quad T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \cos^{-1} x) \quad n = 1, 2, \dots$$

متعامدة في الفترة $-1 \leq x \leq 1$ بالنسبة لدالة الوزن

$$w(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$$

٧ - إثبت أن مجموعة الدوال مركبة القيم

$$\{e^{i\theta n}\}_{n=0, \pm 1, \pm 2, \dots}$$

تكون مجموعة متعامدة في الفترة $0 \leq x \leq 2\pi$ باستخدام حاصل

الضرب الداخلي للمركب.

٨ - إذا كان $L = D(p(x)D) + q(x)$ مؤثر مرافق ذاتي بينما u, v

قبلتان للإشتقاق حتى الرتبة الثانية. إثبت مطابقة لاجرانج

$$\int_{x_0}^{x_1} [uL(v) - vL(u)] dx = [p(x) (u v' - v u')]_{x_0}^{x_1}$$

٩ - إثبت أن المؤثر $L = a_0(x) D^2 + a_1(x) D + a_2(x)$

يكون مؤثر مرافق ذاتي إذا كان

١٠ - إذا لم يكن L مرافقا ذاتيا إثبت أنه يمكن تحويله إلى مؤثرا مرافقا

ذاتيا بضربه في

$$e^{\int (a_1(x)/a_0(x)) dx}$$

١١ - أكتب المعادلات الآتية في صيغة ترافقتها الذاتية

$$a) \quad x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y = 0$$

$$b) (1-x^2) y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

١٢ - أوجد مفكوك فوريير ذو الدورة 2π للدوال الدورية المعروفة في الدورة الآتية:

$$a) f(x) = |\cos x| \quad -\pi < x < \pi$$

$$b) f(x) = 2 - 3 \cos x + 7 \sin 5x$$

١٣ - أوجد مفكوك فوريير للدالة

$$f(x) = 1 \quad 0 < x < \pi/2$$

$$= 0 \quad (\pi/2) < x < \pi$$

أ - في متسلسلة جيوب تمام ودورة 2π

ب - في متسلسلة جيوب ودورة 2π

ج - متسلسلة فوريير عامة ودورة π

١٤ - أوجد دالة جرين لكل مسألة حدية آتية

$$a) y'' = f \quad y(-1) = 0 \quad y(1) = 0$$

$$b) y'' + 4y = f \quad y(0) = y'(1) = 0$$

$$c) y'' + \lambda^2 y = f \quad y(0) = y(1) = 0 \quad \lambda \neq \text{eigenvalue}$$

١٥ - أوجد حل المعادلات

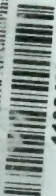
$$a) y'' + \pi^2 y = f \quad y(0) = y(1) = 0$$

$$b) y'' + \lambda_n^2 y = f \quad y(0) = y(1) = 0, \lambda_n = n\pi$$

حيث n عدد صحيح موجب

جامعة الاسكندرية
كلية الهندسة
الكتاب الجامعي المخصص
قسم
المسجل

Biblioteca Alexandrina



1185469